Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий. Часть 1 содержит 13 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–13 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . 10 −0,8 Бланк

При выполнении заданий 14–20 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

При выполнении работы разрешается использовать линейку.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

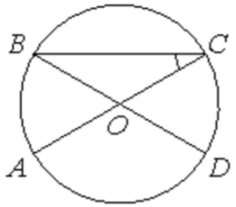
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

Ответом к заданиям 1–13 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Отрезки AC и BD – диаметры окружности с центром O. Угол AOD равен 114°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

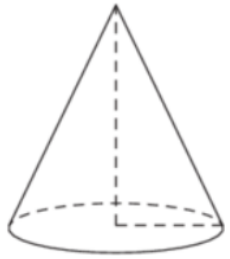


Ответ: _____.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(41;0)$ и $\vec{b}\,(1;-1)$. Найдите длину вектора $\vec{a}-20\vec{b}$.

Ответ: _____.

3 Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?



Ответ: _____.

4 В чемпионате по гимнастике участвуют 70 спортсменок: 25 из США, 17 из Мексики, остальные из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.

Ответ: _____.

5 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

Ответ: _____.

6 Найдите дисперсию случайной величины X, если известно её распределение:

$$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}.$$

Ответ: _____.

7 Найдите корень уравнения

$\sqrt{28-2x}=2$.

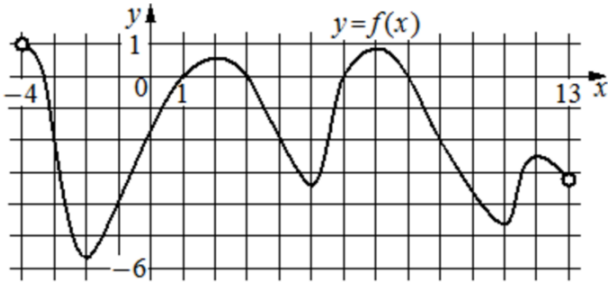
Ответ: _____.

8 Найдите значение выражения

$4^{\frac{1}{5}}\cdot 16^{\frac{9}{10}}$.

Ответ: _____.

9 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-4;13)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна прямой $y=14$.



Ответ: _____.

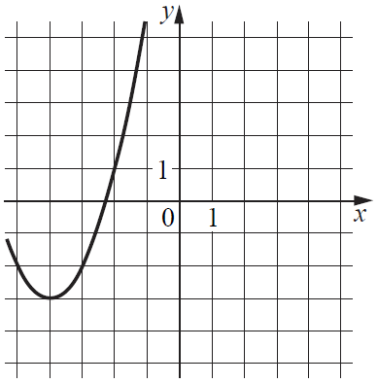
10 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q=120-10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p)=pq$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит 320 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Ответ: _____.

11 Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй – 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Ответ: _____.

12 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(-12)$.



Ответ: _____.

13 В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на сумму 12 млн рублей на 3 года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле 2029 и 2030 годов долг должен быть на 10% меньше долга на июль предыдущего года;
— в июле 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 13626 тыс. рублей. Найдите r.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 14–20 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (14, 15 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

14 а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

15 Дана треугольная пирамида $SABC$. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка CH — высоты треугольника ABC.

а) Докажите, что $AC^2-BC^2=AS^2-BS^2$.
б) Найдите объём пирамиды $SABC$, если $AB=25$, $AC=10$, $BC=5\sqrt{13}$, $SC=3\sqrt{10}$.

16 Решите неравенство

$$\frac{2\cdot 8^{x-1}}{2\cdot 8^{x-1}-1}\geq\frac{3}{8^x-1}+\frac{8}{64^x-5\cdot 8^x+4}.$$

17 Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(\varepsilon)=2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}\cdot\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

где $k=1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ — постоянная Больцмана, ε — кинетическая энергия молекулы в джоулях, T — температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии ε, при котором функция плотности $f(\varepsilon)$ принимает наибольшее значение, если $T=450$ К.

18 В окружность вписана трапеция $ABCD$, AD — большее основание, проведена высота BH, вторично пересекающая окружность в точке K.

а) Докажите, что AC перпендикулярна AK.
б) Найдите AD, если радиус описанной окружности равен 12, $\angle BAC = 30°$, CK пересекает основание AD в точке N. Площадь четырёхугольника $BHNC$ в 8 раз больше, чем площадь треугольника KHN.

19 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x\sqrt{x-a} = \sqrt{6x^2 - (6a+3)x + 3a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

20 Дано трёхзначное число A, сумма цифр которого равна S.

а) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1105$?
б) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1106$?
в) Какое наименьшее значение может принимать выражение, если оно больше 1503?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Составитель варианта — Евгений Пифагор	
Результаты:	Результаты моих учеников: • 53 человека набрали 100 баллов • 789 человек набрали 90+ баллов Личные результаты: • Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль • Высшее образование — ТГУ (Тольятти), 2009-2014 • Занял 1 место в трёх олимпиадах по высшей математике, 2009-2011 • 15 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
ВК:	https://vk.ru/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

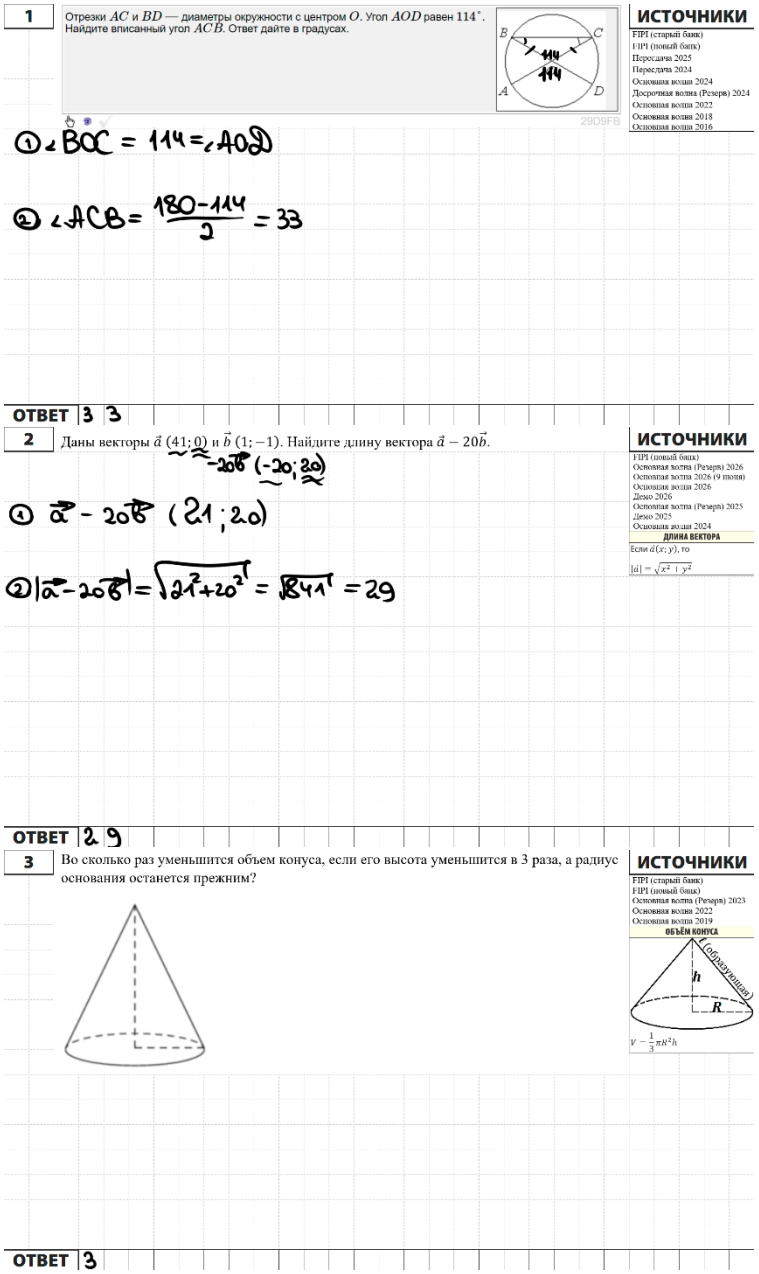
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ №9

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ №9

Ответы

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	33	
2	29	
3	3	
4	0,4	
5	0,83	
6	0,8	
7	12	
8	16	
9	6	
10	8	
11	30	
12	61	
13	5	
14	а) $\pi n, \frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n; n \in Z$ б) $-3\pi;\ -2\pi;\ -\frac{11\pi}{6}$	
15	225	
16	$(-\infty; 0) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$	
17	$3{,}105 \cdot 10^{-21}$	
18	$4\sqrt{33}$	
19	$(-\infty; 0) \cup \left[3-\sqrt{6}; 1\right]$	
20	а) да б) нет в) 1507	

Решения



4 В чемпионате по гимнастике участвуют 70 спортсменок: 25 из США, 17 из Мексики, остальные из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.

2EBA48

$P = \frac{28}{70} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

ОТВЕТ 0,4

5 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

346547

I автомат	II автомат	
ОСТ	ОСТ	×
ОСТ	ЗАК	0,07
ЗАК	ОСТ	0,07
ЗАК	ЗАК	0,03

0,10 → 1

$x = 1 - 0{,}03 - 0{,}07 - 0{,}07 = 0{,}83$

ОТВЕТ 0,83

6 Найдите дисперсию случайной величины X, если известно её распределение:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

① $E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{2}{5} + 2^2 \cdot \frac{1}{5} + 3^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{18}{5} = \frac{24}{5}$

② $E(X) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$

③ $D(X) = \frac{24}{5} - 2^2 = \frac{24}{5} - \frac{4 \cdot 5}{1} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

ОТВЕТ 0,8

7 Найдите корень уравнения $\sqrt{28 - 2x} = 2$.

D6D480

$28 - 2x = 4$

$28 - 4 = 2x$

$24 = 2 \cdot x$

$x = 12$

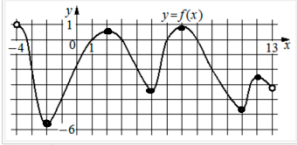
ОТВЕТ 12

8 Найдите значение выражения $4^{\frac{1}{5}} \cdot 16^{\frac{9}{10}}$.

$4^{\frac{1}{5}} \cdot (4^2)^{\frac{9}{10}} = 4^{\frac{1}{5}} \cdot 4^{\frac{18}{10}} = 4^{\frac{2}{10} + \frac{18}{10}} = 4^{\frac{20}{10}} = 4^2 = 16$

ОТВЕТ 16

9 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 13)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 14$.



935729

① $k_{\text{прямой } y=14} = 0$

$\Rightarrow k_{\text{касат.}} = 0 = f'(x_0)$

ОТВЕТ 6

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2025
Основная волна (Резерв) 2024
Основная волна 2022
Досрочная волна 2022
Основная волна 2019
Основная волна 2018
Демо 2026
Демо 2024
Демо 2023
Демо 2021
Демо 2020
Досрочная волна (Резерв) 2024
Досрочная волна 2023
Основная волна 2017
Основная волна 2014
Досрочная волна 2013
Основная волна 2026 (9 июня)
Досрочная волна 2026
Основная волна (Резерв) 2025
Основная волна 2024
Основная волна 2022
Досрочная волна 2019
Досрочная волна 2018
Демо 2025
Досрочная волна 2022
Основная волна (Резерв) 2019
Основная волна 2018
Основная волна 2026
Основная волна (Резерв) 2026
Демо 2026
Основная волна 2025
Пересдача 2024
Досрочная волна (Резерв) 2024
Досрочная волна 2023

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Математическое ожидание E – это среднее ожидаемое значение случайной величины X.

Если распределение по вероятностям P значений некоторой случайной величины X задано таблицей, то:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$

ДИСПЕРСИЯ

Дисперсия D – это характеристика, отвечающая за разброс чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вокруг их среднего значения.

$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \cdots + x_n^2p_n$

$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

Есть две прямые $y_1 = k_1x + b_1$, $y_2 = k_2x + b_2$

1. Если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то прямые совпадают
   ПРИМЕР: $y_1 = 2x + 7$ и $y_2 = 2x + 7$
2. Если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые параллельны
   ПРИМЕР: $y_1 = 2x + 7$ и $y_2 = 2x - 5$
3. Если $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются
   ПРИМЕР: $y_1 = 2x + 7$ и $y_2 = 3x + 7$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

$f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha$

10 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 120 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит 320 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

ИСТОЧНИКИ
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)

5450F1

$r(p) = p \cdot q$

$r(p) = p \cdot (120 - 10p)$

$320 = 120p - 10p^2$

$10p^2 - 120p + 320 = 0 \quad |:10$

$p^2 - 12p + 32 = 0$

~~$p = 4$~~ $\quad p = 8$

ОТВЕТ 8

11 Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

ИСТОЧНИКИ
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2026 (9 июня)
Досрочная волна 2026
Основная волна (Резерв) 2023
Досрочная волна 2022
Досрочная волна 2019
Основная волна 2014
СХЕМА ЗАДАЧ НА СПЛАВЫ И СМЕСИ

5AA449

① $0{,}1 \cdot m_1 + 0{,}35 \cdot m_2 = 0{,}25 \cdot 150$

② $m_1 + m_2 = 150$

$m_1 = 150 - m_2 =$

$= 150 - 90 = 60$

Выразим m_1 из ②:

$m_1 = 150 - m_2$

Подставим m_1 в ①:

$0{,}1 \cdot (150 - m_2) + 0{,}35 \cdot m_2 = 37{,}5$

$15 - 0{,}1 m_2 + 0{,}35 m_2 = 37{,}5$

$0{,}25 m_2 = 22{,}5 \quad |\cdot 4$

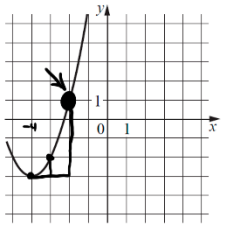
$m_2 = 90$

На 30

ОТВЕТ 30

12 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(-12)$.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна 2026 (9 июня)
Досрочная волна 2026
Досрочная волна 2024
Демо 2024
Демо 2023
Демо 2022



① $a = 1$

② $x_в = \frac{-b}{2a}$

$-4 = \frac{-b}{2 \cdot 1}$

$b = 8$ $\quad f(x) = 1 \cdot x^2 + 8x + c$

③ Найдём c: $\quad (-2; 1)$

$1 = (-2)^2 - 16 + c$

$c = 1 - 4 + 16 = 13$

$f(x) = 1 \cdot x^2 + 8x + 13$

④ $f(-12) = (-12)^2 - 96 + 13 = 61$

ОТВЕТ 61

13 В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на сумму 12 млн рублей на 3 года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле 2029 и 2030 годов долг должен быть на 10% меньше долга на июль предыдущего года;
— в июле 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 13626 тыс. рублей. Найдите r.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна 2026

Дата	Сумма долга
июль 28	12 млн
	12в
январь 29	$\Rightarrow$ в. 12в − 10,8
	$12 - 0{,}1 \cdot 12 = 10{,}8$
	$10{,}8 \cdot в$
январь 30	$\Rightarrow$ в. $10{,}8в - 9{,}72$
	$10{,}8 - 0{,}1 \cdot 10{,}8 = 9{,}72$
	$9{,}72в$
январь 31	$\Rightarrow$ в. $9{,}72в$
	0

О.С.В. $= 13{,}626$ млн

$12в - 10{,}8 + 10{,}8в - 9{,}72 + 9{,}72в = 13{,}626$

$32{,}52 \cdot в = 34{,}146$

$в = \frac{34146}{1000} = \frac{5691}{542} = 1{,}05$

$1 + \frac{г}{100} = 1{,}05$

$\frac{г}{100} = \frac{5}{100}$

$г = 5$

Ответ: 5.

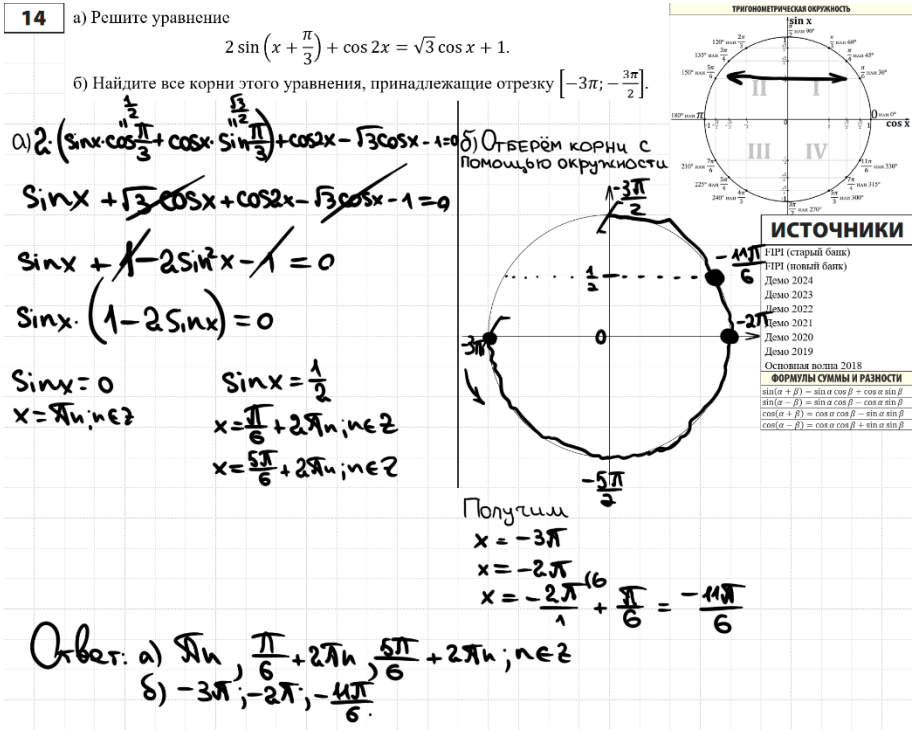
34146 | 6
30 | 5691
41
36
54
54
06

5691 | 5420
5420 | 1,05
27100
27100
0

14 а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

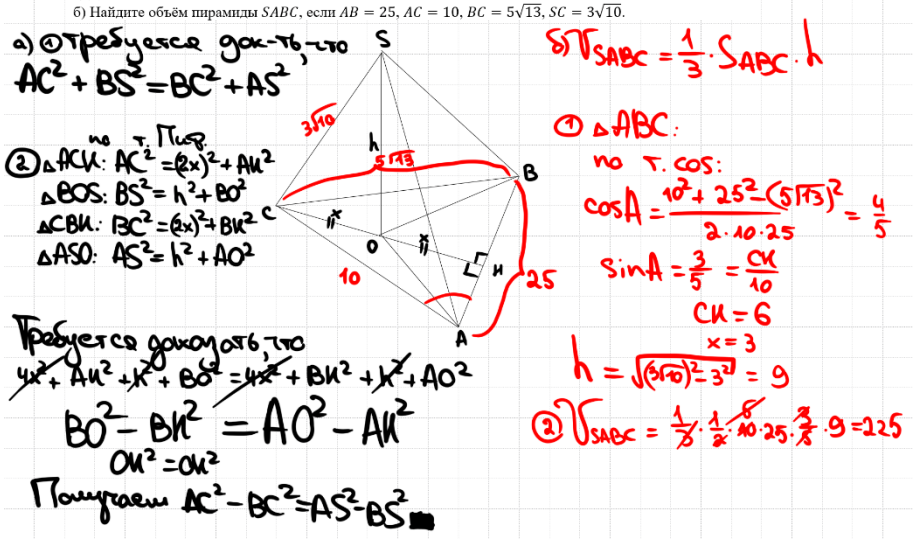


Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Дана треугольная пирамида $SABC$. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка CH — высоты треугольника ABC.

а) Докажите, что $AC^2-BC^2=AS^2-BS^2$.

б) Найдите объём пирамиды $SABC$, если $AB=25$, $AC=10$, $BC=5\sqrt{13}$, $SC=3\sqrt{10}$.

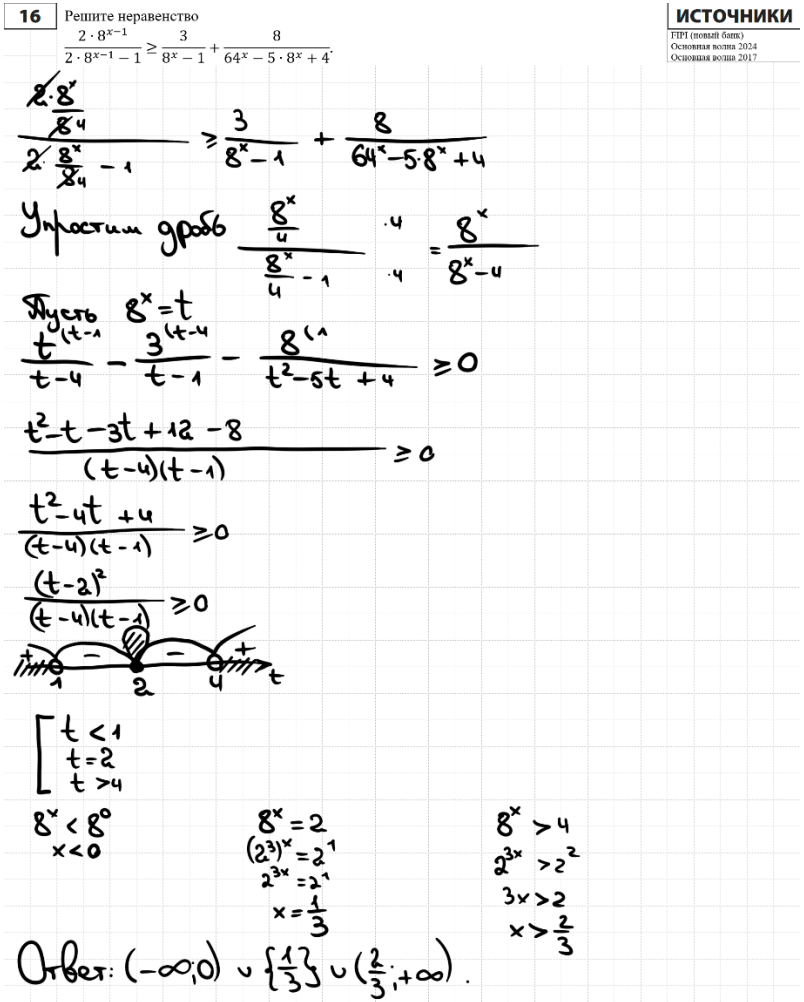


Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

16 Решите неравенство

$$\frac{2\cdot 8^{x-1}}{2\cdot 8^{x-1}-1}\geq\frac{3}{8^x-1}+\frac{8}{64^x-5\cdot 8^x+4}.$$

ИСТОЧНИКИ
ГПП (новый банк)
Основная волна 2024
Основная волна 2017

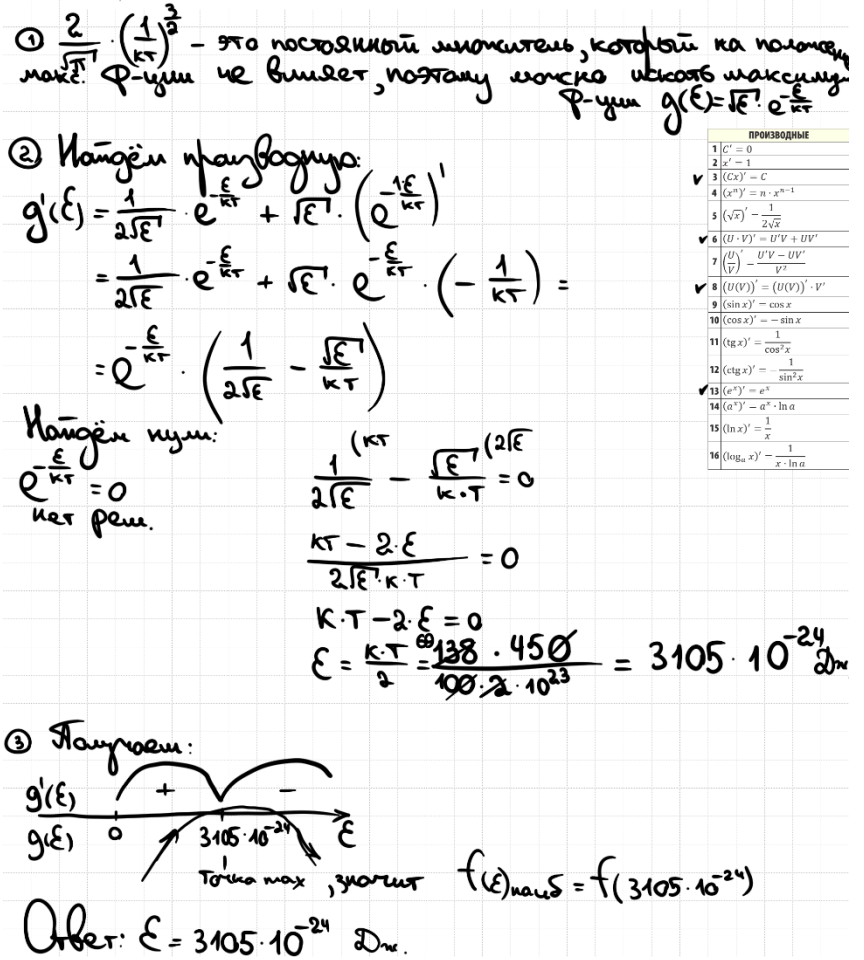


Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17 Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(\varepsilon)=2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}\cdot\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

где $k=1{,}38\cdot 10^{-23}\,\frac{Дж}{К}$ – постоянная Больцмана, ε – кинетическая энергия молекулы в джоулях, T – температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии ε, при котором функция плотности $f(\varepsilon)$ принимает наибольшее значение, если $T=450$ К.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

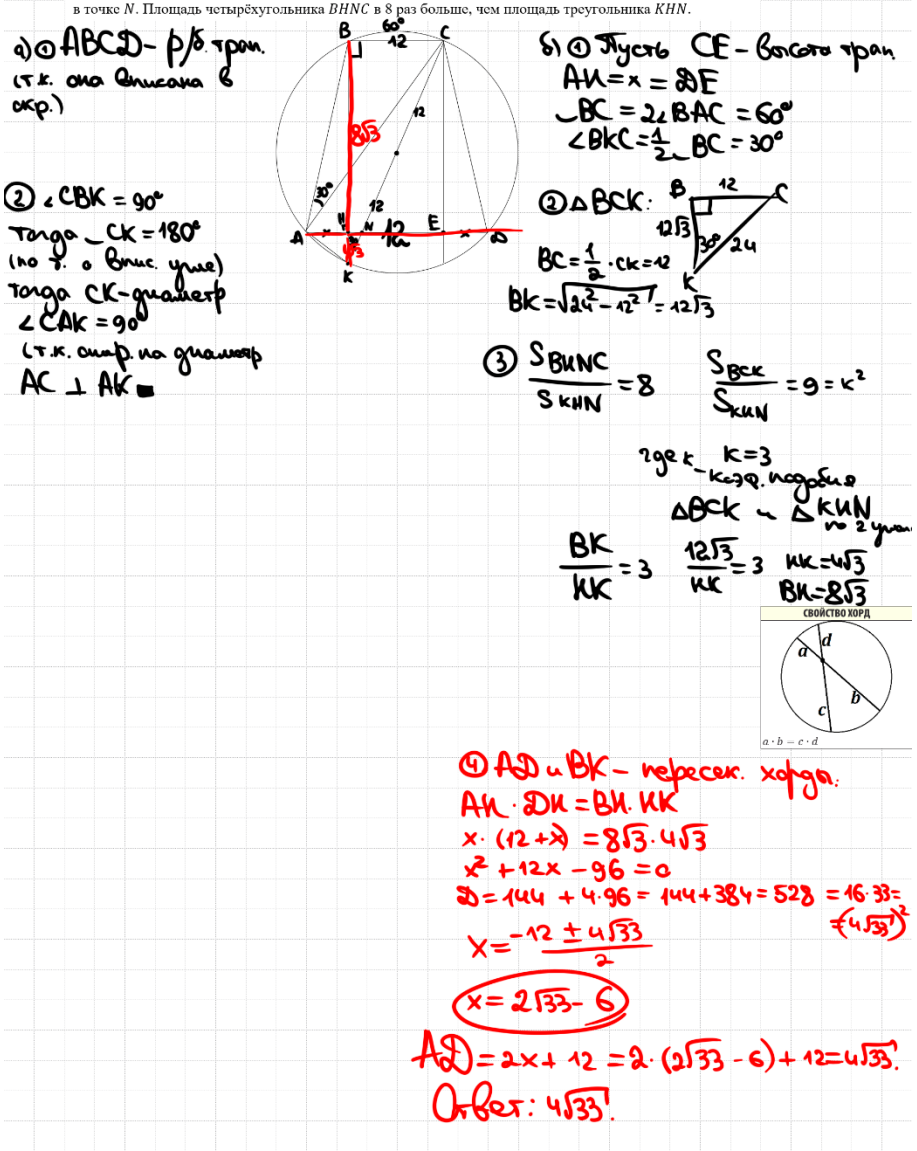
18 В окружность вписана трапеция $ABCD$, AD — большее основание, проведена высота BH, вторично пересекающая окружность в точке K.

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2021

а) Докажите, что AC перпендикулярна AK.

б) Найдите AD, если радиус описанной окружности равен 12, $\angle BAC = 30°$, CK пересекает основание AD в точке N. Площадь четырёхугольника $BHNC$ в 8 раз больше, чем площадь треугольника KHN.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

19 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x\sqrt{x-a} = \sqrt{6x^2 - (6a+3)x + 3a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна 2024
Основная волна (Резерв) 2023
Основная волна (Резерв) 2017

т.к. $0 \le x \le 1$, то без части ур-я ≥ 0

значит

$$* \begin{cases} x^2(x-a) = 6x^2 - (6a+3)\cdot x + 3a \\ x - a \ge 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Упростим

$$* \quad x^2(x-a) = 6x^2 - 6ax - 3x + 3a$$
$$x^2(x-a) = 6x(x-a) - 3(x-a)$$
$$(x-a)(x^2 - 6x + 3) = 0$$

$x = a$

$x^2 - 6x + 3 = 0$

$D = 36 - 4\cdot 1\cdot 3 = 24 = (2\sqrt{6})^2$

$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{2}$

$x = 3 + \sqrt{6}$ не принадлежит отрезку $[0;1]$

$x = 3 - \sqrt{6}$

Получаем

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = 3 - \sqrt{6} \end{array}\right. \\ x - a \ge 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

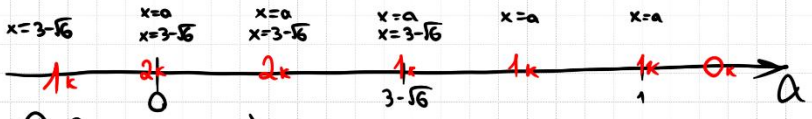
$x = a$ явл. корнем ур-я, если $\begin{cases} a - a \ge 0 \\ 0 \le a \le 1 \end{cases}$

при $\begin{cases} 0 \ge 0 \\ 0 \le a \le 1 \end{cases}$ $x = a$ явл. корнем ур-я наибр.

$x = 3 - \sqrt{6}$ явл. корнем ур-я, если $\begin{cases} 3 - \sqrt{6} - a \ge 0 \\ 0 \le 3 - \sqrt{6} \le 1 \end{cases}$

при $a \le 3 - \sqrt{6}$ $x = 3 - \sqrt{6}$ явл. корн. ур-я

$x = a$ совпадает с $x = 3 - \sqrt{6}$, если $a = 3 - \sqrt{6}$



Ответ: $(-\infty;0) \cup [3-\sqrt{6};1]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

20 Дано трёхзначное число A, сумма цифр которого равна S.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна 2021

а) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1105$?
б) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1106$?
в) Какое наименьшее значение может принимать выражение, если оно больше 1503?

а) Разложим 1105 на простые множители:

1105 | 5
221 | 13
17 | 17

$1105 = 17 \cdot 13 \cdot 5$
$1105 = 221 \cdot 5$ ✓

Ответ: а) да.

б) Разложим 1106 на простые мн-ли:

1106 | 2
553 | 7
79 | 79

$1106 = 2 \cdot 7 \cdot 79$

Есть два варианта, чем может быть A

① Если $A = 158$, то $S = 7$ ×
② $A = 553$, то $S > 2$ ×

Не может, т.к. все возможные случаи рассмотрели и они не подошли

Ответ: б) нет.

20 Дано трёхзначное число A, сумма цифр которого равна S.

а) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1105$?
б) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1106$?
в) Какое наименьшее значение может принимать выражение, если оно больше 1503?

в) Может ли быть 1504?

$1504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 47$
$\Rightarrow S$ не может быть кратно 47
Пр $A = 47 \cdot 4 = 188$ $S = 8$ ×
$A = 47 \cdot 8 = 376$ $S = 4$ ×
$A = 47 \cdot 16 = 752$ $S = 2$ ×

Может ли быть 1505?

$1505 = 5 \cdot 7 \cdot 43$
$\Rightarrow S$ не может быть кратно 43
Пр $A = 43 \cdot 5 = 215$ $S = 7$ ×
$A = 43 \cdot 7 = 301$ $S = 5$ ×

Может ли быть 1506?

$1506 = 2 \cdot 3 \cdot 251$
$\Rightarrow S$ не может быть кратно 251
Пр $A = 251$ $S = 6$ ×
$A = 251 \cdot 2 = 502$ $S = 3$ ×
$A = 251 \cdot 3 = 753$ $S = 2$ ×
$> 15 \geq 1507$

Может ли быть 1507?

$1507 = 11 \cdot 137$
$A = 137$ $S = 11$ ✓

Ответ: в) 1507.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4