Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 25 заданий. Часть 1 содержит 19 заданий, часть 2 содержит 6 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 запишите в бланк ответов № 1 в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1. Если получилась обыкновенная дробь, запишите ответ в виде равной ей десятичной дроби.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на бланке ответов № 2. Задания можно выполнять в любом порядке. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Все бланки заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования выполняйте в черновике. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами, выданными вместе с вариантом КИМ, и линейкой.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Составитель: Школа Пифагора

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

АЛГЕБРА

- Формула корней квадратного уравнения:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D=b^2-4ac.$$

- Если квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет два корня x_1 и x_2, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2);$$

если квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет единственный корень x_0, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2.$$

- Абсцисса вершины параболы, заданной уравнением $y=ax^2+bx+c$:

$$x_0=-\frac{b}{2a}.$$

- Формула n-го члена арифметической прогрессии (a_n), первый член которой равен a_1 и разность равна d:

$$a_n=a_1+d(n-1).$$

- Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

- Формула n-го члена геометрической прогрессии b_n, первый член которой равен b_1, а знаменатель равен q:

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$$

- Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n=\frac{\left(q^n-1\right)b_1}{q-1}.$$

- Формулы сокращённого умножения:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

- Свойства арифметического квадратного корня:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \text{ при } a\geq 0,\ b\geq 0;$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ при } a\geq 0,\ b>0.$$

- Свойства степени при $a>0,\ b>0$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n};$$
$$a^n\cdot a^m=a^{n+m};$$
$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m};$$
$$\left(a^n\right)^m=a^{nm};$$
$$(ab)^n=a^n\cdot b^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

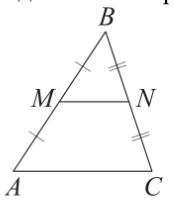
Таблица квадратов двузначных чисел

		Единицы									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Десятки	**1**	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

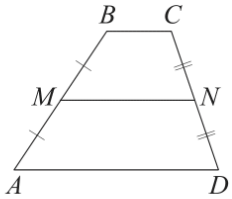
ГЕОМЕТРИЯ

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Средняя линия треугольника и трапеции

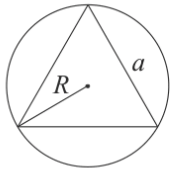


MN — ср. лин.
$MN \parallel AC$
$MN=\frac{AC}{2}$

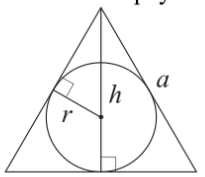


$BC \parallel AD$
MN — ср. лин.
$MN \parallel AD$
$MN=\frac{BC+AD}{2}$

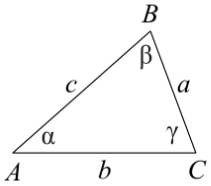
Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$
$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$
$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$



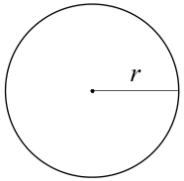
Для треугольника ABC со сторонами $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

Для треугольника ABC со сторонами $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

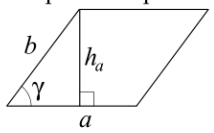


Длина окружности $C=2\pi r$

Площадь круга $S=\pi r^2$

Площади фигур

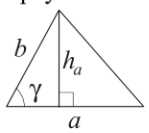
Параллелограмм



$S = ah_a$

$S = ab\sin\gamma$

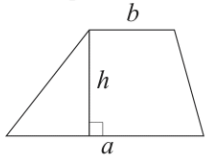
Треугольник



$S = \frac{1}{2}ah_a$

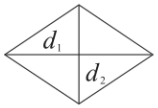
$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Трапеция



$S = \frac{a+b}{2}\cdot h$

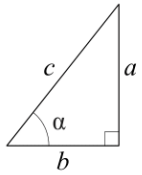
Ромб



d_1, d_2 — диагонали

$S = \frac{1}{2}d_1d_2$

Прямоугольный треугольник



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Некоторые значения тригонометрических функций

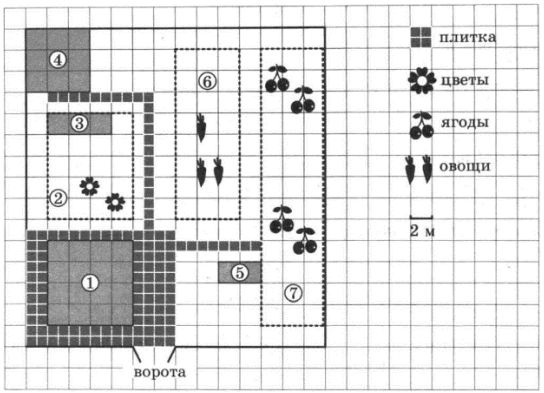
α	градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

Ответами к заданиям 1–19 являются число или последовательность цифр, которые следует записать в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами.

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5.



На плане изображён дачный участок по адресу: СНТ Рассвет, ул. Центральная, д. 32 (сторона каждой клетки на плане равна 2 м). Участок имеет прямоугольную форму. Выезд и въезд осуществляются через единственные ворота.

Площадь, занятая жилым домом, равна 64 кв. м. Помимо жилого дома, на участке есть баня, к которой ведёт дорожка, выложенная специальным садовым покрытием.

Между жилым домом и баней находится цветник с теплицей. Теплица отмечена на плане цифрой 3. Напротив жилого дома находится бак с водой для полива растений, за ним плодово-ягодные кустарники. В глубине участка есть огород для выращивания овощей, отмеченный цифрой 6.

Все дорожки внутри участка имеют ширину 1 м и застелены садовым покрытием, состоящим из плит размером 1 м × 1 м. Прямоугольная площадка вокруг дома выложена плитками такого же размера, но другой фактуры и цвета.

К дачному участку подведено электричество. Имеется магистральное газоснабжение.

1 Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на плане. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность четырёх цифр без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Объекты	жилой дом	цветник	бак с водой	баня
Цифры				

2 Плиты для садовых дорожек продаются в упаковках по 6 штук. Сколько упаковок плит понадобилось, чтобы выложить все дорожки и площадку вокруг дома?

Ответ: _____.

3 Найдите площадь бани. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: _____.

4 Найдите суммарную площадь плитки на прямоугольной площадке вокруг дома. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: _____.

5 Хозяин участка планирует установить в жилом доме систему отопления. Он рассматривает два варианта: электрическое или газовое отопление. Цены на оборудование и стоимость его установки, данные о расходе газа, электроэнергии и их стоимости даны в таблице.

	Нагреватель (котёл)	Прочее оборудование и монтаж	Сред. расход газа/сред. потребл. мощность	Стоимость газа/электроэнергии
Газовое отопление	22 тыс. руб.	16 412 руб.	1,3 куб. м/ч	4,4 руб./куб. м
Электр. отопление	18 тыс. руб.	12 000 руб.	4,7 кВт	4,2 руб./(кВтч)

Обдумав оба варианта, хозяин решил установить газовое оборудование. Через сколько часов непрерывной работы отопления экономия от использования газа вместо электричества компенсирует разницу в стоимости установки газового и электрического оборудования?

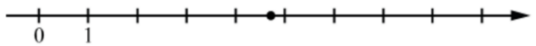
Ответ: _____.

6 Найдите значение выражения

$\frac{1}{5}-\frac{27}{20}$.

Ответ: _____.

7 Одно из чисел $\frac{33}{7}$, $\frac{37}{7}$, $\frac{41}{7}$, $\frac{43}{7}$ отмечено на прямой точкой.



Какое это число?

1) $\frac{33}{7}$
2) $\frac{37}{7}$
3) $\frac{41}{7}$
4) $\frac{43}{7}$

Ответ: ☐

8 Найдите значение выражения

$6x \cdot (8x^6)^2 : (8x^4)^3$

при $x = 60$.

Ответ: _____.

9 Найдите корень уравнения

$(x-5)^2 = (x+10)^2$.

Ответ: _____.

10 Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или не пишет), равна 0,19. Покупатель в магазине выбирает одну шариковую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

Ответ: _____.

11 Установите соответствие между функциями и их графиками.

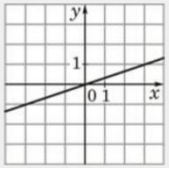
ФУНКЦИИ

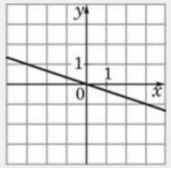
А) $y = 3x$

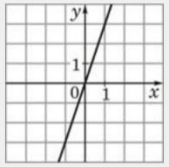
Б) $y = \frac{1}{3}x$

В) $y = -\frac{1}{3}x$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

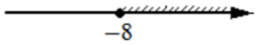
А	Б	В

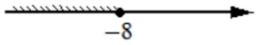
12 Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$,
где d_1 и d_2 – длины диагоналей четырёхугольника, α – угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_2, если $d_1 = 6$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, а $S = 19$.

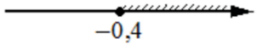
Ответ: _____.

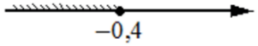
13 Укажите решение неравенства

$-2x + 5 \le -3x - 3$.

1) 

2) 

3) 

4) 

Ответ:

14 Известно, что на высоте 2205 м над уровнем моря атмосферное давление составляет 550 мм рт. ст. Считая, что при подъёме на каждые 10,5 м давление уменьшается примерно на 1 мм рт. ст., определите атмосферное давление на высоте 1995 м над уровнем моря.

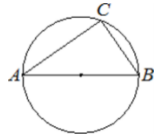
Ответ: _____.

15 Сторона ромба равна 4, а один из углов этого ромба равен 150°. Найдите высоту этого ромба.



Ответ: _____.

16 Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 20. Найдите BC, если $AC = 32$.



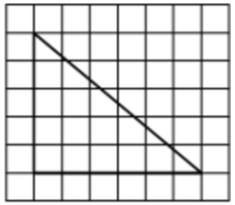
Ответ: _____.

17 Периметр квадрата равен 160. Найдите площадь этого квадрата.



Ответ: _____.

18 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён прямоугольный треугольник. Найдите длину его большего катета.



Ответ: _____.

19 Какое из следующих утверждений верно?

1) Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра окружности равно радиусу.
2) Средняя линия трапеции равна сумме её оснований.
3) Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

20 Решите уравнение

$x^3 + 3x^2 = 16x + 48.$

21 Имеются два сосуда, содержащие 40 кг и 30 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 73% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 72% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

22 Постройте график функции

$$y = \frac{(0{,}75x^2 - 0{,}75x)|x|}{x - 1}.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

23 Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD = 42$, $BC = 14$, $CF : DF = 4 : 3$.

24 Точка E — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции.

25 На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 49$, $MD = 42$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Составитель варианта — Евгений Пифагор	
Результаты:	Результаты моих учеников: • 53 человека набрали 100 баллов • 789 человек набрали 90+ баллов Личные результаты: • Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль • Высшее образование — ТГУ (Тольятти), 2009-2014 • Занял 1 место в трёх олимпиадах по высшей математике, 2009-2011 • 15 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
ВК:	https://vk.ru/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике

Часть 1

За правильный ответ на каждое из заданий 1–19 ставится 1 балл.

Номер задания	Правильный ответ	Текстовое решение	Видео решение
1	1254	✍	▶
2	20	✍	▶
3	36	✍	▶
4	90	✍	▶
5	600	✍	▶
6	-1,15	✍	▶
7	1	✍	▶
8	45	✍	
9	-2,5	✍	▶
10	0,81	✍	▶
11	312	✍	▶
12	19	✍	▶
13	2	✍	▶
14	570		
15	2	✍	▶
16	24	✍	▶
17	1600	✍	▶
18	6	✍	▶
19	1	✍	▶
20	-4; -3; 4	✍	▶
21	19,5	✍	▶
22	0,75	✍	▶
23	30	✍	▶
24	■	✍	▶
25	13	✍	▶

Часть 2

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

20 Решите уравнение $x^3 + 3x^2 = 16x + 48$.

750F66

$x^2 \cdot (x+3) = 16 \cdot (x+3)$
$x^2 \cdot (x+3) - 16 \cdot (x+3) = 0$
$(x+3) \cdot (x^2 - 16) = 0$
$(x+3) \cdot (x-4) \cdot (x+4) = 0$

$x = -3$ или $x = 4$ или $x = -4$

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: $\pm 4; -3$

21 Имеются два сосуда, содержащие 40 кг и 30 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 73% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 72% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

Схема задач на сплавы и смеси

$\text{Доля}_1 \cdot m_1 + \text{Доля}_2 \cdot m_2 = \text{Доля}_{\text{смеси}} \cdot m_{\text{смеси}}$

$\begin{cases} x \cdot 40 + y \cdot 30 = 0{,}73 \cdot 70 \\ x \cdot m + y \cdot m = 0{,}72 \cdot 2m \end{cases} \quad | : m$

Выразим y: $y = 1{,}44 - x$

$40x + 30 \cdot (1{,}44 - x) = 51{,}1$
$40x + 43{,}2 - 30x = 51{,}1$
$10x = 7{,}9$
$x = 0{,}79$
$y = 1{,}44 - 0{,}79 = 0{,}65$
$30 \cdot 0{,}65 = 19{,}5$

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: 19,5

22 Постройте график функции $y = \dfrac{(0{,}75x^2 - 0{,}75x)\,|x|}{x-1}$.

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

5A6286

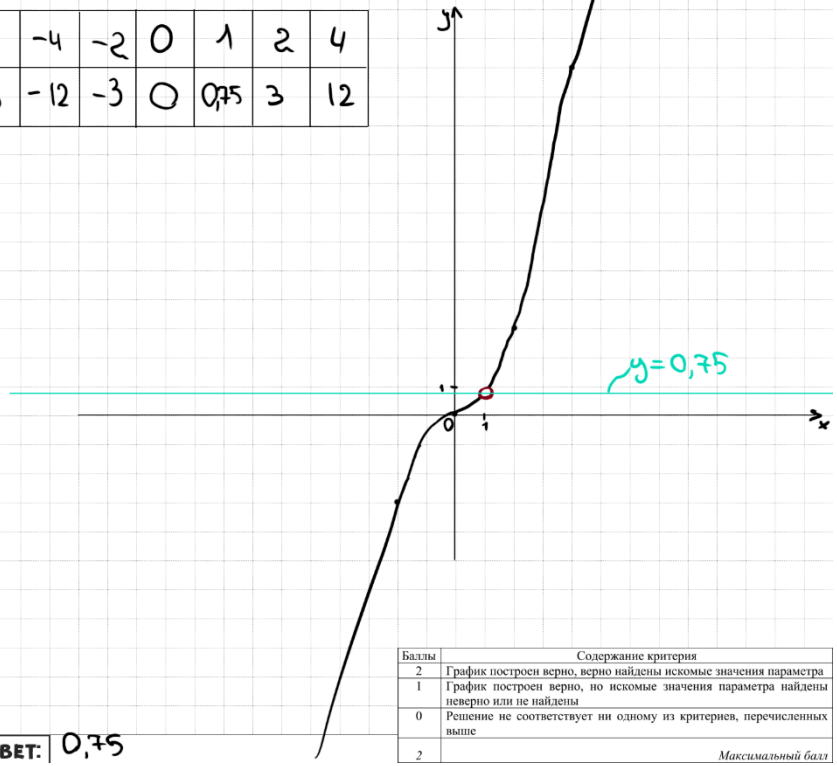
$y = \dfrac{0{,}75x \cdot (x-1) \cdot |x|}{x-1}$ при $x \neq 1$, получаем $y = 0{,}75x \cdot |x|$

① При $x \geq 0$: $y = 0{,}75x^2$

② При $x < 0$: $y = -0{,}75 \cdot x^2$

$y = \begin{cases} 0{,}75x^2 & \text{при } x \geq 0 \\ -0{,}75x^2 & \text{при } x < 0 \end{cases}$

x	-4	-2	0	1	2	4
y	-12	-3	0	0,75	3	12



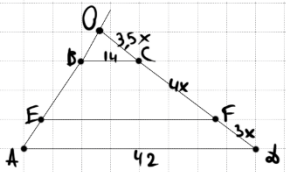
Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: 0,75

23

Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD = 42$, $BC = 14$, $CF : DF = 4 : 3$.

55CB45



① $AB \cap CD = O$

② $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ по 2 углам

$\frac{3}{1}\frac{42}{14} = \frac{7x + OC}{OC}$

$3 \cdot OC = 7x + OC$

$2 \cdot OC = 7x$

$OC = 3,5x$

③ $\triangle AOD \sim \triangle OEF$ по 2 углам

$\frac{42}{EF} = \frac{10,5x}{7,5x}$ $\quad \frac{42}{EF} = \frac{10,5}{7,5}$

$EF = \frac{42 \cdot 7,5}{10,5} = 30$

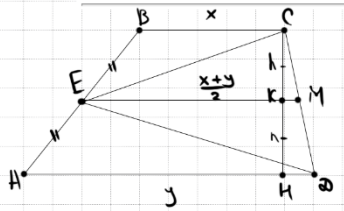
Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения, или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: 30

24

Точка E — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции.

955204



① $S_{ECD} = S_{ECM} + S_{EDM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \cdot h$

$= \frac{1}{4} \cdot (x+y)h + \frac{1}{4}(x+y)h$

$= \frac{1}{2} \cdot (x+y)h$

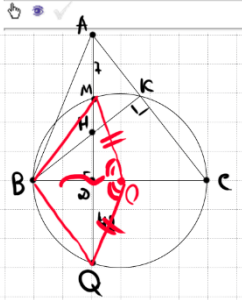
② $S_{трапеции} = \frac{x+y}{2} \cdot 2h = (x+y) \cdot h$

$\Rightarrow S_{ECD} = \frac{1}{2} S_{трап}$ ■

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 49$, $MD = 42$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.



① K лежит на окружности т.к. $\angle BKC = 90°$ и $\angle BKC$ - опирается на диаметр.

② AQ и AC - секущие

$AM \cdot AQ = AK \cdot AC$

$7 \cdot (49+42) = AK \cdot AC$

$637 = AK \cdot AC$

③ $\triangle AKH \sim \triangle ACD$

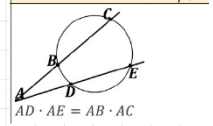
$\frac{AK}{AD} = \frac{AH}{AC}$

$AD \cdot AH = AK \cdot AC$

$7 \cdot 49 \cdot AH = 7 \cdot 91$

$AH = 13$

Свойство секущих



$AD \cdot AE = AB \cdot AC$

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: 13

Составитель: Школа Пифагора