Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 25 заданий. Часть 1 содержит 19 заданий, часть 2 содержит 6 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 запишите в бланк ответов № 1 в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1. Если получилась обыкновенная дробь, запишите ответ в виде равной ей десятичной дроби.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на бланке ответов № 2. Задания можно выполнять в любом порядке. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Все бланки заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования выполняйте в черновике. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами, выданными вместе с вариантом КИМ, и линейкой.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Составитель: Школа Пифагора

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

АЛГЕБРА

- Формула корней квадратного уравнения:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D=b^2-4ac.$$

- Если квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет два корня x_1 и x_2, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2);$$

если квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет единственный корень x_0, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2.$$

- Абсцисса вершины параболы, заданной уравнением $y=ax^2+bx+c$:

$$x_0=-\frac{b}{2a}.$$

- Формула n-го члена арифметической прогрессии (a_n), первый член которой равен a_1 и разность равна d:

$$a_n=a_1+d(n-1).$$

- Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

- Формула n-го члена геометрической прогрессии b_n, первый член которой равен b_1, а знаменатель равен q:

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$$

- Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n=\frac{(q^n-1)b_1}{q-1}.$$

- Формулы сокращённого умножения:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

- Свойства арифметического квадратного корня:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \text{ при } a\geq 0,\ b\geq 0;$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ при } a\geq 0,\ b>0.$$

- Свойства степени при $a>0,\ b>0$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n};$$
$$a^n\cdot a^m=a^{n+m};$$
$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m};$$
$$\left(a^n\right)^m=a^{nm};$$
$$(ab)^n=a^n\cdot b^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

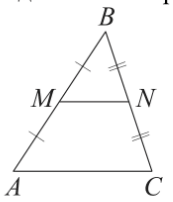
Таблица квадратов двузначных чисел

		Единицы									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Десятки	**1**	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

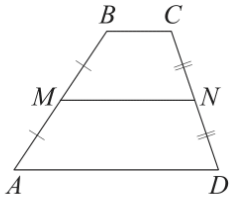
ГЕОМЕТРИЯ

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Средняя линия треугольника и трапеции

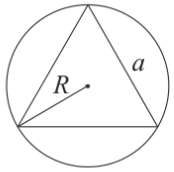


MN — ср. лин.
$MN \parallel AC$
$MN=\frac{AC}{2}$

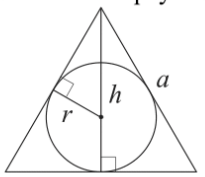


$BC \parallel AD$
MN — ср. лин.
$MN \parallel AD$
$MN=\frac{BC+AD}{2}$

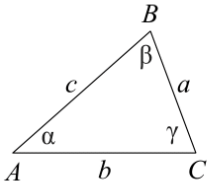
Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$
$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$
$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$



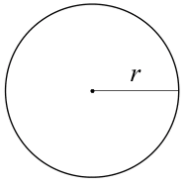
Для треугольника ABC со сторонами $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

Для треугольника ABC со сторонами $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

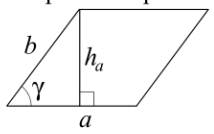


Длина окружности $C=2\pi r$

Площадь круга $S=\pi r^2$

Площади фигур

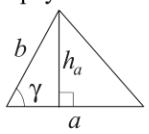
Параллелограмм



$S = ah_a$

$S = ab\sin\gamma$

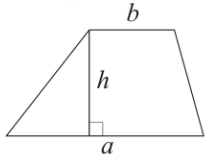
Треугольник



$S = \frac{1}{2}ah_a$

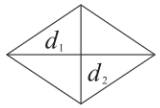
$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Трапеция



$S = \frac{a+b}{2}\cdot h$

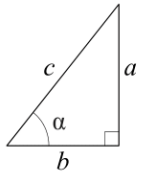
Ромб



d_1, d_2 — диагонали

$S = \frac{1}{2}d_1d_2$

Прямоугольный треугольник



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Некоторые значения тригонометрических функций

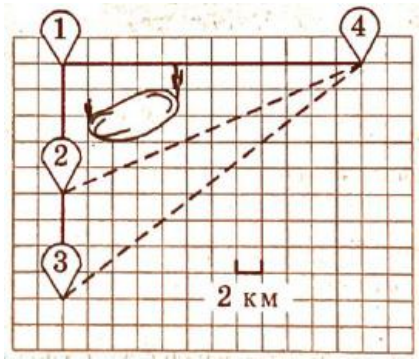
α	градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

Часть 1

Ответами к заданиям 1–19 являются число или последовательность цифр, которые следует записать в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами.

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5.

На рисунке изображён план сельской местности.
Гриша летом отдыхает у дедушки в деревне Грушёвка. В понедельник они собираются съездить на велосипедах в село Абрамово на ярмарку. Из деревни Грушёвка в село Абрамово можно проехать по прямой лесной дорожке. Есть более длинный путь: по прямолинейному шоссе через деревню Таловка до деревни Новая, где нужно повернуть под прямым углом направо на другое шоссе, ведущее в село Абрамово. Есть и третий маршрут: в деревне Таловка можно свернуть на прямую тропинку в село Абрамово, которая идёт мимо пруда.
Лесная дорожка и тропинка образуют с шоссе прямоугольные треугольники.



По шоссе Гриша с дедушкой едут со скоростью 24 км/ч, а по лесной дорожке и тропинке – со скоростью 15 км/ч. На плане изображено взаимное расположение населённых пунктов, длина стороны каждой клетки равна 2 км.

1 Пользуясь описанием, определите, какими цифрами на плане обозначены населённые пункты. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность трёх цифр без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Насел. пункты	д. Таловка	д. Грушёвка	с. Абрамово
Цифры			

2 Сколько километров проедут Гриша с дедушкой от деревни Таловка до села Абрамово, если они поедут по шоссе через деревню Новая?

Ответ: _____.

3 Найдите расстояние от деревни Таловки до села Абрамово по прямой. Ответ дайте в километрах.

Ответ: _____.

4 Сколько минут затратят на дорогу из деревни Грушёвка в село Абрамово Гриша с дедушкой, если они поедут сначала по шоссе, а затем свернут в Таловке на прямую тропинку, которая проходит мимо пруда?

Ответ: _____.

5 В таблице указана стоимость (в рублях) некоторых продуктов в четырёх магазинах, расположенных в деревне Грушёвка, селе Абрамово, деревне Таловка и деревне Новая.

Наименование продукта	д. Грушёвка	с. Абрамово	д. Таловка	д. Новая
Молоко (1 л)	52	53	61	54
Хлеб (1 батон)	31	32	36	40
Сыр «Российский» (1 кг)	620	610	630	700
Говядина (1 кг)	490	560	470	520
Картофель (1 кг)	23	28	25	29

Гриша с дедушкой хотят купить 3 батона хлеба, 1,5 кг сыра «Российский» и 5 кг картофеля. В каком магазине такой набор продуктов будет стоить дешевле всего? В ответ запишите стоимость данного набора в этом магазине.

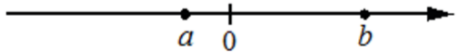
Ответ: _____.

6 Найдите значение выражения

$\frac{1}{4}+\frac{37}{20}$.

Ответ: _____.

7 На координатной прямой отмечены числа a и b.



Какое из приведённых утверждений для этих чисел **неверно**?

1) $a+b>0$
2) $a-b<0$
3) $ab>0$
4) $ab^2<0$

Ответ: ☐

8 Найдите значение выражения

$$\frac{x^9 \cdot x^5}{x^{10}}$$

при $x = 3$.

Ответ: _____.

9 Найдите корень уравнения

$4(x - 8) = -5$.

Ответ: _____.

10 Родительский комитет закупил 20 пазлов для подарков детям в связи с окончанием учебного года, из них 10 с машинами и 10 с видами городов. Подарки распределяются случайным образом между 20 детьми, среди которых есть Коля. Найдите вероятность того, что Коле достанется пазл с машиной.

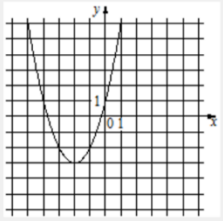
Ответ: _____.

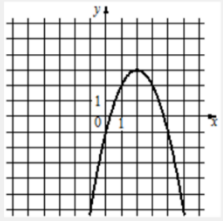
11 Установите соответствие между функциями и их графиками.

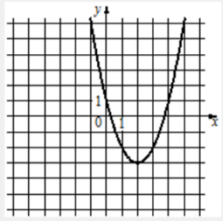
ФУНКЦИИ

А) $y = x^2 + 4x + 1$ Б) $y = x^2 - 4x + 1$ В) $y = -x^2 + 4x - 1$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

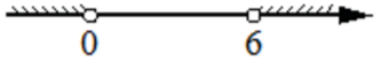
Ответ:

А	Б	В

12 Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой $t_F = 1{,}8t_C + 32$, где t_C – температура в градусах Цельсия, t_F – температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует 80 градусов по шкале Цельсия?

Ответ: _____.

13 Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.



1) $x^2 - 6x < 0$
2) $x^2 - 6x > 0$
3) $x^2 - 36 < 0$
4) $x^2 - 36 > 0$

Ответ: ☐

14 Известно, что на высоте 2205 м над уровнем моря атмосферное давление составляет 550 мм рт. ст. Считая, что при подъёме на каждые 10,5 м давление уменьшается примерно на 1 мм рт. ст., определите атмосферное давление на высоте 2415 м над уровнем моря.

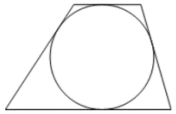
Ответ: _____.

15 Площадь параллелограмма равна 48, а две его стороны равны 8 и 16. Найдите его высоты. В ответе укажите меньшую высоту.



Ответ: _____.

16 Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 16. Найдите высоту этой трапеции.



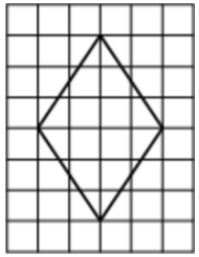
Ответ: _____.

17 Основания трапеции равны 4 и 10, а высота равна 5. Найдите площадь этой трапеции.



Ответ: _____.

18 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите площадь этого ромба.



Ответ: _____.

19 Какое из следующих утверждений верно?

1) Площадь трапеции равна произведению основания трапеции на высоту.
2) Если в треугольнике есть один острый угол, то этот треугольник остроугольный.
3) Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

20 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y. \end{cases}$$

21 Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 75 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего параллельно путям со скоростью 3 км/ч навстречу поезду, за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

22 Постройте график функции

$y = |x|(x + 1) - 6x$.

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

23 Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $45°$ и $120°$, а $CD = 40$.

24 На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.

25 Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 25$ и $CD = 16$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причём $\angle AKB = 60°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Составитель варианта — Евгений Пифагор	
Результаты:	Результаты моих учеников: • 53 человека набрали 100 баллов • 789 человек набрали 90+ баллов Личные результаты: • Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль • Высшее образование — ТГУ (Тольятти), 2009-2014 • Занял 1 место в трёх олимпиадах по высшей математике, 2009-2011 • 15 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
ВК:	https://vk.ru/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике

Часть 1

За правильный ответ на каждое из заданий 1–19 ставится 1 балл.

Номер задания	Правильный ответ	Текстовое решение	Видео решение
1	234		
2	34		
3	26		
4	124		
5	1138		
6	2,1	✍	▶
7	3	✍	▶
8	81	✍	
9	6,75	✍	▶
10	0,5	✍	▶
11	132	✍	▶
12	176	✍	▶
13	2	✍	▶
14	530		
15	3	✍	▶
16	32	✍	▶
17	35	✍	▶
18	12	✍	▶
19	3	✍	▶
20	$(1;1);\left(\frac{2}{3};0\right)$	✍	▶
21	650	✍	▶
22	-6,25; 12,25	✍	▶
23	$20\sqrt{6}$	✍	▶
24	■	✍	▶
25	$\sqrt{427}$	✍	▶

Часть 2

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

20 Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y. \end{cases}$

417E79

$3x^2 - 2x = 3x - 2$

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

$D = 1$

$x = \frac{5 \pm 1}{6}$

$x_1 = 1$ $\quad x_2 = \frac{2}{3}$

$y_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ $\quad y_2 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 0$

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: $(1; 1)$; $(\frac{2}{3}; 0)$

21 Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 75 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего параллельно путям со скоростью 3 км/ч навстречу поезду, за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

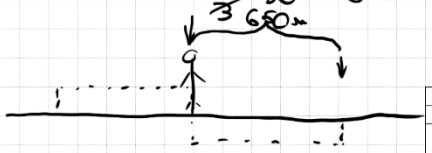
217BDE

① $v_{сбл} = 75 + 3 = 78$ км/ч $= \frac{78 \cdot 1000}{3600} = \frac{65}{3}$ м/с

② $v_{сбл} = \frac{65}{3}$ м/с

$t_{сбл} = 30$ с

$S_{сбл} = \frac{65}{3} \cdot 30 = 650$ м



Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: 650

22 Постройте график функции $y = |x|(x + 1) - 6x$.

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

0D3070

При $x \geq 0$

$y = x \cdot (x + 1) - 6x$

$y = x^2 + x - 6x$

$y = x^2 - 5x$

$x_0 = \frac{5}{2} = 2{,}5$

При $x < 0$

$y = -x \cdot (x + 1) - 6x$

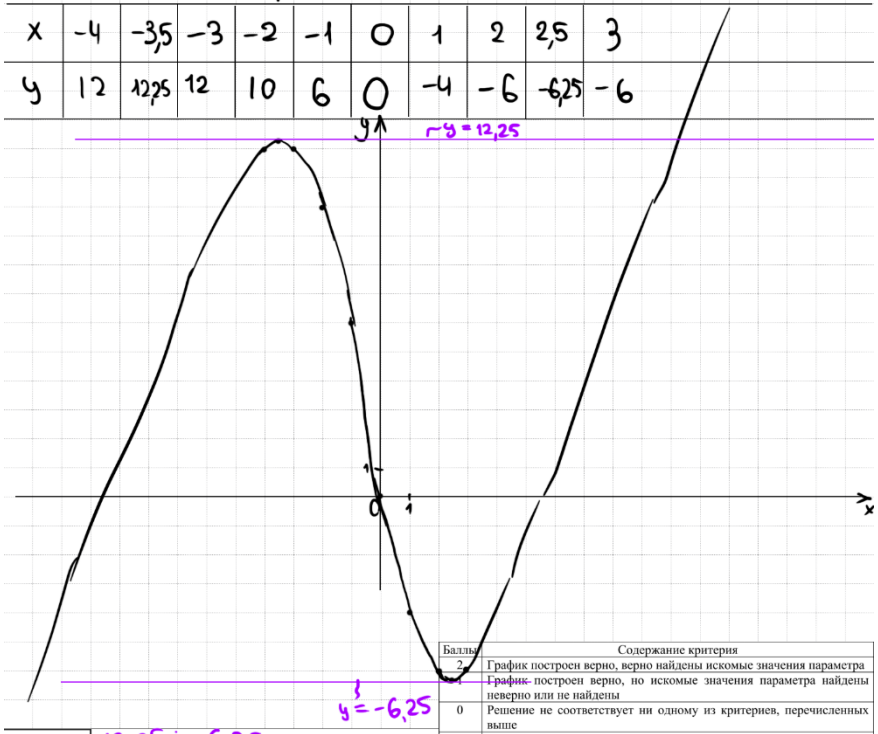
$y = -x^2 - 7x$

$x_0 = -3{,}5$

Получили кусочно-заданную функцию:

$$y = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{при } x \geq 0 \\ -x^2 - 7x & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

x	-4	-3,5	-3	-2	-1	0	1	2	2,5	3
y	12	12,25	12	10	6	0	-4	-6	-6,25	-6

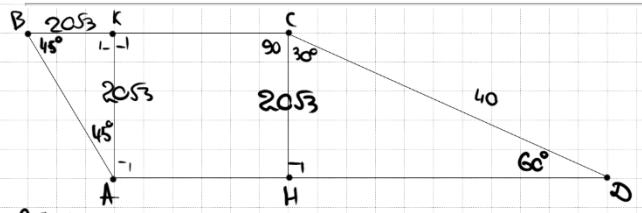


Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: 12,25 ; -6,25

23 Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 45° и 120°, а $CD = 40$.

EE99B1



① $\triangle CDH$:

$\cos 30^\circ = \frac{CH}{40}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CH}{40}$ $\quad CH = 20\sqrt{3} = BK = AK$

② $\triangle ABK$:

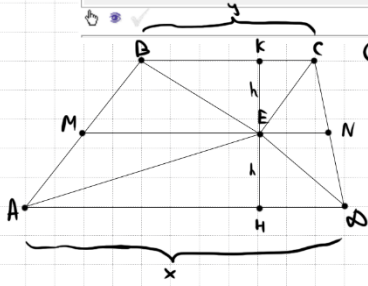
$AB = \sqrt{(20\sqrt{3})^2 + (20\sqrt{3})^2} = \sqrt{400 \cdot 6} = 20\sqrt{6}$

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения, или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: $20\sqrt{6}$

24 На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.

F57F67



① $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot h$

$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h$

$S_{BEC} + S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (x + y)$

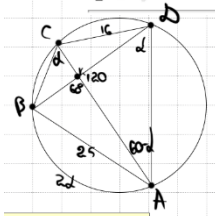
② $S_{трап} = \frac{x+y}{2} \cdot 2h = h \cdot (x + y)$

$\Rightarrow S_{\triangle BEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} S_{трап}$ ■

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

25 Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 25$ и $CD = 16$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причём $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

BB17F



ТЕОРЕМА СИНУСОВ



$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

$\triangle ABC$: $\frac{25}{\sin\alpha} = 2R$

$\triangle ACD$: $\frac{16}{\sin(60-\alpha)} = 2R$

1 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2 $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

① $\frac{25}{\sin\alpha} = \frac{16}{\sin(60-\alpha)}$

$25 \cdot \sin(60-\alpha) = 16\sin\alpha$

$25 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) = 16\sin\alpha$

$\frac{25\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{25}{2}\sin\alpha = \frac{32}{2}\sin\alpha \quad | \cdot 2$

$25\sqrt{3}\cos\alpha = 57\sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{57}{25\sqrt{3}}\sin\alpha$

$\frac{\sin^2\alpha}{1} + \frac{57^2}{25^2 \cdot 3}\sin^2\alpha = 1$

$\frac{1875 + 3249}{25^2 \cdot 3}\sin^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = \frac{25^2 \cdot 3}{5124} = \frac{25}{1708}$

$\sin\alpha = \frac{25}{2\sqrt{427}}$

② $\frac{25}{\frac{25}{2\sqrt{427}}} = 2R$

$2\sqrt{427} = 2R$

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: $\sqrt{427}$

Составитель: Школа Пифагора