Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 25 заданий. Часть 1 содержит 19 заданий, часть 2 содержит 6 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 запишите в бланк ответов № 1 в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1. Если получилась обыкновенная дробь, запишите ответ в виде равной ей десятичной дроби.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на бланке ответов № 2. Задания можно выполнять в любом порядке. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Все бланки заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования выполняйте в черновике. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами, выданными вместе с вариантом КИМ, и линейкой.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Составитель: Школа Пифагора

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

АЛГЕБРА

- Формула корней квадратного уравнения:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D=b^2-4ac.$$

- Если квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет два корня x_1 и x_2, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2);$$

если квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет единственный корень x_0, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2.$$

- Абсцисса вершины параболы, заданной уравнением $y=ax^2+bx+c$:

$$x_0=-\frac{b}{2a}.$$

- Формула n-го члена арифметической прогрессии (a_n), первый член которой равен a_1 и разность равна d:

$$a_n=a_1+d(n-1).$$

- Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

- Формула n-го члена геометрической прогрессии b_n, первый член которой равен b_1, а знаменатель равен q:

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$$

- Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n=\frac{\left(q^n-1\right)b_1}{q-1}.$$

- Формулы сокращённого умножения:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

- Свойства арифметического квадратного корня:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \text{ при } a\geq 0,\ b\geq 0;$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ при } a\geq 0,\ b>0.$$

- Свойства степени при $a>0,\ b>0$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n};$$
$$a^n\cdot a^m=a^{n+m};$$
$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m};$$
$$\left(a^n\right)^m=a^{nm};$$
$$(ab)^n=a^n\cdot b^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

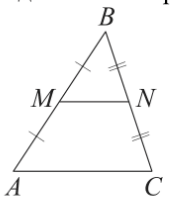
Таблица квадратов двузначных чисел

		Единицы									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Десятки	**1**	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

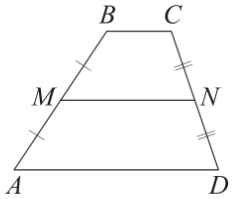
ГЕОМЕТРИЯ

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Средняя линия треугольника и трапеции

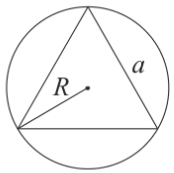


MN — ср. лин.
$MN \parallel AC$
$MN=\frac{AC}{2}$

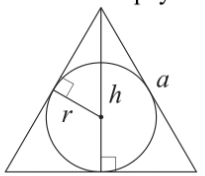


$BC \parallel AD$
MN — ср. лин.
$MN \parallel AD$
$MN=\frac{BC+AD}{2}$

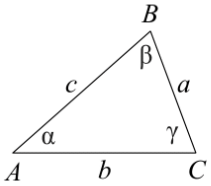
Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$
$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$
$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$



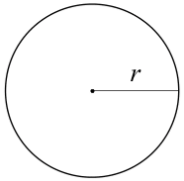
Для треугольника ABC со сторонами $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

Для треугольника ABC со сторонами $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

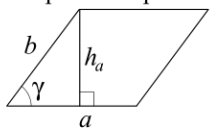


Длина окружности $C=2\pi r$

Площадь круга $S=\pi r^2$

Площади фигур

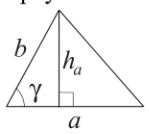
Параллелограмм



$S = ah_a$

$S = ab\sin\gamma$

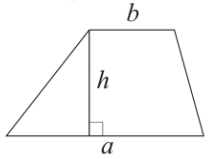
Треугольник



$S = \frac{1}{2}ah_a$

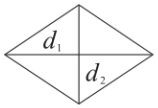
$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Трапеция



$S = \frac{a+b}{2}\cdot h$

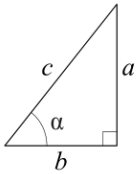
Ромб



d_1, d_2 — диагонали

$S = \frac{1}{2}d_1d_2$

Прямоугольный треугольник



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Некоторые значения тригонометрических функций

α	градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

Часть 1

Ответами к заданиям 1–19 являются число или последовательность цифр, которые следует записать в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами.

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5.



Рис. 1

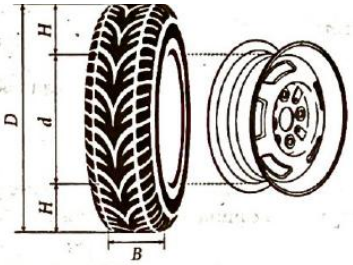


Рис. 2

Автомобильное колесо, как правило, представляет из себя металлический диск с установленной на него резиновой шиной. Диаметр диска совпадает с диаметром внутреннего отверстия в шине.

Для маркировки автомобильных шин применяется единая система обозначений. Например, $195/65R15$ (рис. 1). Первое число (число 195 в приведённом примере) обозначает ширину шины в миллиметрах (параметр B на рисунке 2). Второе число (число 65 в приведённом примере) – процентное отношение высоты боковины (параметр H на рисунке 2) к ширине шины, то есть $100 \cdot \frac{H}{B}$.

Последующая буква обозначает тип конструкции шины. В данном примере буква R означает, что шина радиальная, то есть нити каркаса в боковине шины расположены вдоль радиусов колеса. На всех легковых автомобилях применяются шины радиальной конструкции.

За обозначением типа конструкции шины идёт число, указывающее диаметр диска колеса d в дюймах (в одном дюйме 25,4 мм). Таким образом, общий диаметр колеса D легко найти, зная диметр диска и высоту боковины.

Возможны дополнительные маркировки, обозначающие допустимую нагрузку на шину, сезонность использования, тип дорожного покрытия и другие параметры.

Завод производит легковые автомобили определённой модели и устанавливает на них колёса с шинами маркировки $185/60R14$.

1 Завод допускает установку шин с другими маркировками. В таблице показаны разрешённые размеры шин.

Ширина шины (мм)	Диаметр диска (дюймы)		
	14	15	16
185	185/60	185/55	—
195	195/55	195/55; 195/50	—
205		205/50	205/50
215	—	—	215/45

Шины какой наименьшей ширины можно устанавливать на автомобиль, если диаметр диска равен 16 дюймам? Ответ дайте в миллиметрах.

Ответ: _____.

2 Найдите диаметр колеса автомобиля, выходящего с завода. Ответ дайте в миллиметрах.

Ответ: _____.

3 На сколько миллиметров увеличится диаметр колеса, если заменить колёса, установленные на заводе, колёсами с шинами маркировки $195/55R15$?

Ответ: _____.

4 На сколько процентов увеличится пробег автомобиля при одном обороте колеса, если заменить колёса, установленные на заводе, колёсами с шинами маркировки $205/50R16$? Результат округлите до десятых.

Ответ: _____.

5 Илья планирует заменить зимнюю резину на летнюю на своём автомобиле. Для каждого из четырёх колёс последовательно выполняются четыре операции: снятие колеса, замена шины, балансировка колеса и установка колеса. Он выбирает между автосервисами А и Б. Затраты на дорогу и стоимость операций даны в таблице.

Автосервис	Суммарные затраты на дорогу	Стоимость для одного колеса			
		Снятие колеса	Замена шины	Балансировка колеса	Установка колеса
А	120 руб.	50 руб.	210 руб.	175 руб.	50 руб.
Б	70 руб.	55 руб.	195 руб.	185 руб.	55 руб.

Сколько рублей заплатит Илья за замену резины на своём автомобиле, если выберет самый дешёвый вариант?

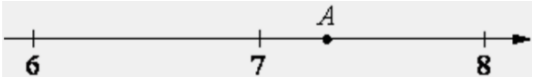
Ответ: _____.

6 Найдите значение выражения

$$\frac{1}{\frac{1}{18}-\frac{1}{21}}.$$

Ответ: _____.

7 Одно из чисел $\sqrt{41}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{53}$, $\sqrt{63}$ отмечено на прямой точкой A.



Какое это число?

1) $\sqrt{41}$
2) $\sqrt{48}$
3) $\sqrt{53}$
4) $\sqrt{63}$

Ответ: ☐

8 Найдите значение выражения

$$\frac{\left(b^{\sqrt{2}}\right)^{6\sqrt{2}}}{b^{11}}$$

при $b = 3$.

Ответ: _____.

9 Решите уравнение

$9x^2 = 54x$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Ответ: _____.

10 В лыжных гонках участвуют 13 спортсменов из России, 2 спортсмена из Норвегии и 5 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из Норвегии или Швеции.

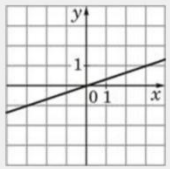
Ответ: _____.

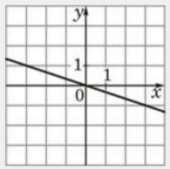
11 Установите соответствие между функциями и их графиками.

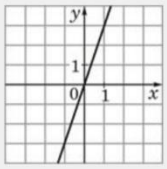
ФУНКЦИИ

А) $y = 3x$ Б) $y = \frac{1}{3}x$ В) $y = -\frac{1}{3}x$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

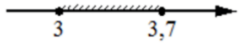
А	Б	В

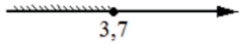
12 Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = I^2R$, где I – сила тока (в амперах), R – сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R, если мощность составляет 29,25 Вт, а сила тока равна 1,5 А. Ответ дайте в омах.

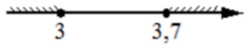
Ответ: _____.

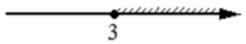
13 Укажите решение системы неравенств

$$\begin{cases} x - 3{,}7 \le 0, \\ x - 2 \ge 1. \end{cases}$$

1) 

2) 

3) 

4) 

Ответ:

14 При проведении химического опыта реагент равномерно охлаждали на 5,6 °С в минуту. Найдите температуру реагента (в градусах Цельсия) спустя 5 минут после начала проведения опыта, если начальная температура составляла +6,2 °С.

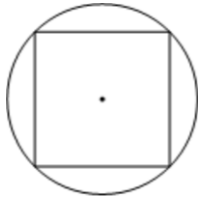
Ответ: _____.

15 Один из углов параллелограмма равен 96°. Найдите меньший угол этого параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



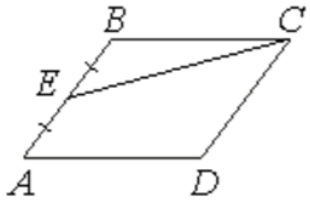
Ответ: _____.

16 Сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



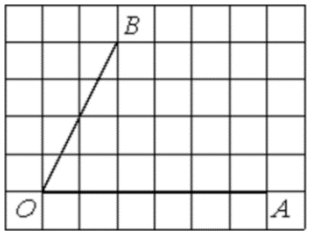
Ответ: _____.

17 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 180. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции $DAEC$.



Ответ: _____.

18 Найдите тангенс угла AOB, изображённого на рисунке.



Ответ: _____.

19 Какое из следующих утверждений верно?

1) Площадь прямоугольного треугольника равна произведению длин его катетов.
2) Существует прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.
3) Если стороны одного четырёхугольника соответственно равны сторонам другого четырёхугольника, то такие четырёхугольники равны.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

20 Решите уравнение

$x^2 - 6x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 7.$

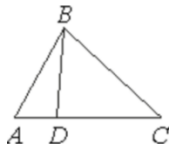
21 Из А в В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого автомобилиста на 11 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью 66 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 40 км/ч.

22 Постройте график функции

$y = |x|(x+1) - 6x.$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

23 На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = 4$, $DC = 7$. Площадь треугольника ABC равна 55. Найдите площадь треугольника ABD.



24 Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.

25 Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 40 и 41, а основание BC равно 16. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Составитель варианта — Евгений Пифагор	
Результаты:	Результаты моих учеников: • 53 человека набрали 100 баллов • 789 человек набрали 90+ баллов Личные результаты: • Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль • Высшее образование — ТГУ (Тольятти), 2009-2014 • Занял 1 место в трёх олимпиадах по высшей математике, 2009-2011 • 15 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
ВК:	https://vk.ru/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике

Часть 1

За правильный ответ на каждое из заданий 1–19 ставится 1 балл.

Номер задания	Правильный ответ	Текстовое решение	Видео решение
1	205		
2	577,6		
3	17,9		
4	5,9		
5	2030		
6	126	✍	▶
7	3	✍	▶
8	3	✍	
9	0	✍	▶
10	0,35	✍	▶
11	312	✍	▶
12	13	✍	▶
13	1	✍	▶
14	-21,8		
15	84	✍	▶
16	4	✍	▶
17	135	✍	▶
18	2	✍	▶
19	2	✍	▶
20	-1	✍	▶
21	44	✍	▶
22	-6,25; 12,25	✍	▶
23	20	✍	▶
24	■	✍	▶
25	820	✍	▶

Часть 2

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

20 Решите уравнение $x^2 - 6x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 7$.

DC6888

$6 - x \geq 0$

$6 \geq x$

$x \leq 6$

$x^2 - 6x - 7 = 0$

$D = 8^2$

$x = \frac{6 \pm 8}{2}$

$x_1 = 7$ не подходит

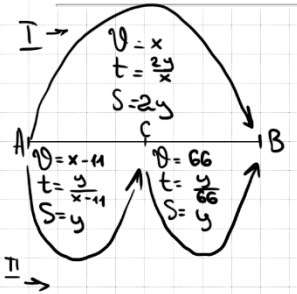
$x_2 = -1$

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: -1

21 Из А в В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого автомобилиста на 11 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью 66 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 40 км/ч.

2C9FFA



$\frac{2y}{x} = \frac{y}{x-11} + \frac{y}{66} \quad | : y$

$\frac{2}{x} = \frac{1}{x-11} + \frac{1}{66}$

$\frac{2}{x} = \frac{55 + x}{66x - 66 \cdot 11}$

$x^2 + 55x = 132x - 1452$

$x^2 - 77x + 1452 = 0$

$D = 5929 - 5808 = 121$

$x = \frac{77+11}{2} = 44$

$x = \frac{77-11}{2} = 33$

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: 44

22 Постройте график функции $y = |x|(x+1) - 6x$.

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

0D3070

① При $x \geq 0$

$y = x \cdot (x+1) - 6x$

$y = x^2 - 5x$

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2}$

② При $x < 0$

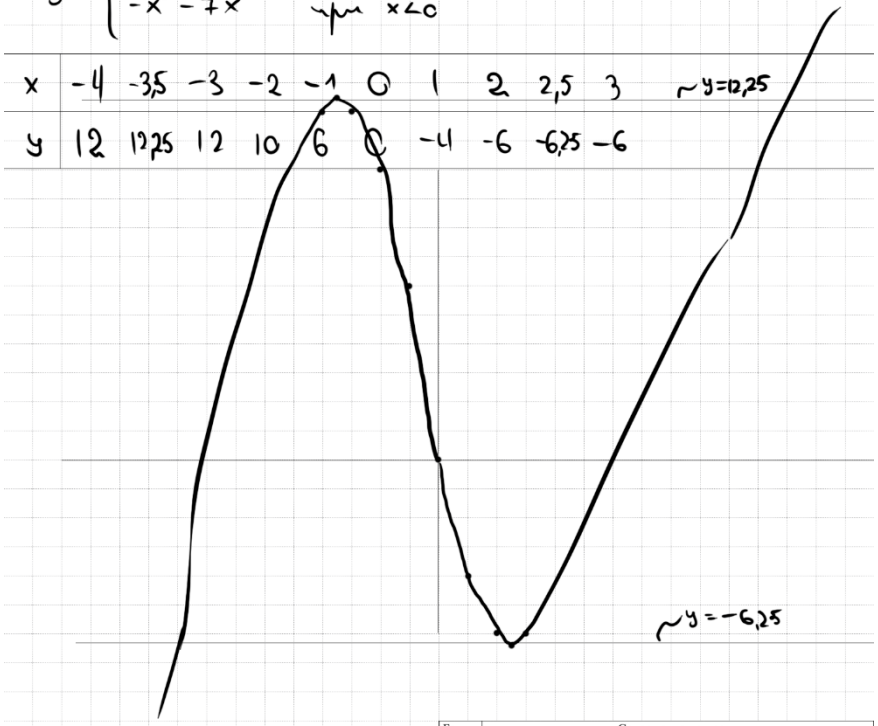
$y = -x \cdot (x+1) - 6x$

$y = -x^2 - 7x$

$x_0 = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$

$$y = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{при } x \geq 0 \\ -x^2 - 7x & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

x	-4	-3,5	-3	-2	-1	0	1	2	2,5	3	~y=12,25
y	12	12,25	12	10	6	0	-4	-6	-6,25	-6	



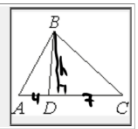
Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: $-6,25$; $12,25$

Составитель: Школа Пифагора

23

На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = 4$, $DC = 7$. Площадь треугольника ABC равна 55. Найдите площадь треугольника ABD.



258E9A

① $S_{ABC} = 55 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot h$, $h = 10$

② $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 = 20$

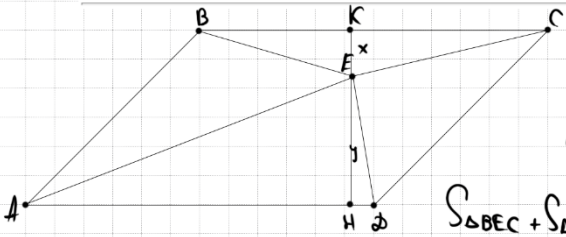
Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения, или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: 20

24

Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.

BD4A4E



$S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot x$

$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot y = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot y$

$S_{ABCD} = BC \cdot (x+y)$

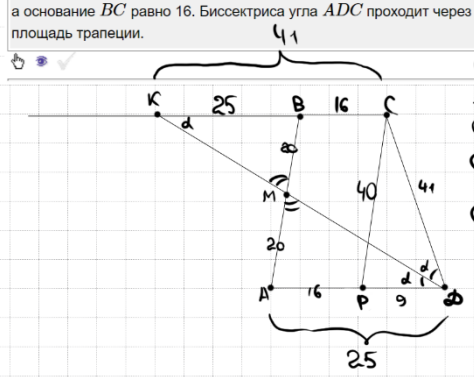
$S_{\triangle BEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} BC \cdot x + \frac{1}{2} BC \cdot y = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot (x+y)$

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

25

Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 40 и 41, а основание BC равно 16. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

0A23B5



① $\angle BKD = \angle ADK$ (накрест лежащие)
$\Rightarrow \triangle CDK$ – равнобедренный.

② $BK = CK - 16 = 41 - 16 = 25$

③ $\triangle BMK = \triangle ADM$ по 2 ч.
$\Rightarrow AD = 25$

④ Пусть $PC \parallel AB$
$PC = 40$
$DP = 25 - 16 = 9$
$\triangle CPD$: $41^2 = 40^2 + 9^2$
$\Rightarrow \triangle CPD$ – египетский.
$\angle CPD = 90^\circ$
$\Rightarrow PC$ – высота $= 40$

⑤ $S = \frac{16+25}{2} \cdot 40 = 820$

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: 820

Составитель: Школа Пифагора