Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 25 заданий. Часть 1 содержит 19 заданий, часть 2 содержит 6 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 запишите в бланк ответов № 1 в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1. Если получилась обыкновенная дробь, запишите ответ в виде равной ей десятичной дроби.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на бланке ответов № 2. Задания можно выполнять в любом порядке. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Все бланки заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования выполняйте в черновике. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами, выданными вместе с вариантом КИМ, и линейкой.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Составитель: Школа Пифагора

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

АЛГЕБРА

- Формула корней квадратного уравнения:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\text{ где } D=b^2-4ac.$$

- Если квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет два корня x_1 и x_2, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2);$$

если квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет единственный корень x_0, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2.$$

- Абсцисса вершины параболы, заданной уравнением $y=ax^2+bx+c$:

$$x_0=-\frac{b}{2a}.$$

- Формула n-го члена арифметической прогрессии (a_n), первый член которой равен a_1 и разность равна d:

$$a_n=a_1+d(n-1).$$

- Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

- Формула n-го члена геометрической прогрессии b_n, первый член которой равен b_1, а знаменатель равен q:

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$$

- Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n=\frac{\left(q^n-1\right)b_1}{q-1}.$$

- Формулы сокращённого умножения:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

- Свойства арифметического квадратного корня:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \text{ при } a\geq 0,\ b\geq 0;$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ при } a\geq 0,\ b>0.$$

- Свойства степени при $a>0,\ b>0$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n};$$
$$a^n\cdot a^m=a^{n+m};$$
$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m};$$
$$\left(a^n\right)^m=a^{nm};$$
$$(ab)^n=a^n\cdot b^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

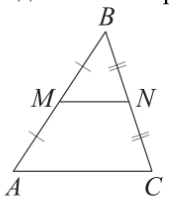
Таблица квадратов двузначных чисел

		Единицы									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Десятки	**1**	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

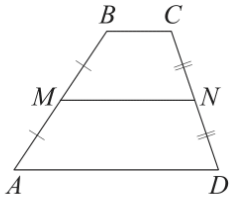
ГЕОМЕТРИЯ

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Средняя линия треугольника и трапеции

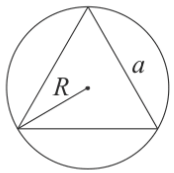


MN — ср. лин.
$MN \parallel AC$
$MN=\frac{AC}{2}$

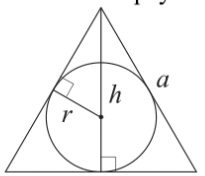


$BC \parallel AD$
MN — ср. лин.
$MN \parallel AD$
$MN=\frac{BC+AD}{2}$

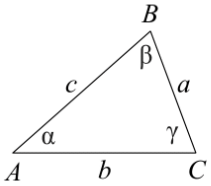
Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$
$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$
$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$



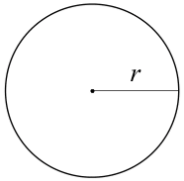
Для треугольника ABC со сторонами $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

Для треугольника ABC со сторонами $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

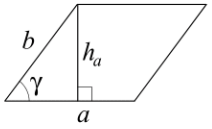


Длина окружности $C=2\pi r$

Площадь круга $S=\pi r^2$

Площади фигур

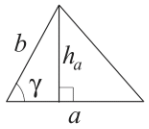
Параллелограмм



$S = ah_a$

$S = ab\sin\gamma$

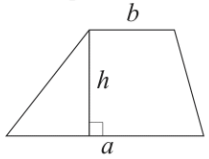
Треугольник



$S = \frac{1}{2}ah_a$

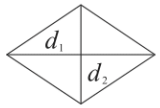
$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Трапеция



$S = \frac{a+b}{2}\cdot h$

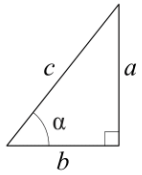
Ромб



d_1, d_2 — диагонали

$S = \frac{1}{2}d_1d_2$

Прямоугольный треугольник



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Некоторые значения тригонометрических функций

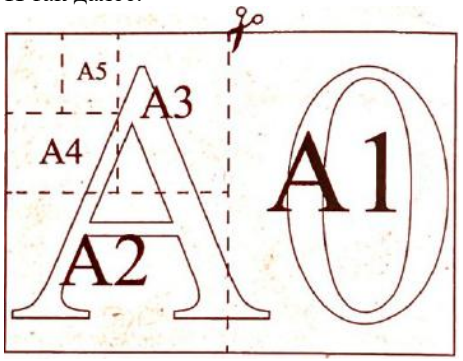
α	градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

Часть 1

Ответами к заданиям 1–19 являются число или последовательность цифр, которые следует записать в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами.

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5.

Общепринятые форматы листов бумаги обозначают буквой А и цифрой: А0, А1, А2 и так далее. Лист формата А0 имеет форму прямоугольника, площадь которого равна 1 кв. м. Если лист формата А0 разрезать пополам параллельно меньшей стороне, получается два равных листа формата А1. Если лист А1 разрезать так же пополам, получается два листа формата А2. И так далее.



Отношение большей стороны к меньшей стороне листа каждого формата одно и то же, поэтому листы всех форматов подобны. Это сделано специально для того, чтобы пропорции текста и его расположение на листе сохранялись при уменьшении или увеличении шрифта при изменении формата листа.

1 В таблице даны размеры (с точностью до мм) четырёх листов, имеющих форматы A0, A1, A3 и A4.

Номер листа	Длина (мм)	Ширина (мм)
1	297	210
2	420	297
3	1189	841
4	841	594

Установите соответствие между форматами и номерами листов. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность четырёх цифр, соответствующих номерам листов, без пробелов, запятых и дополнительных символов.

A0	A1	A3	A4

2 Сколько листов формата A3 получится из одного листа формата A2?

Ответ: _____.

3 Найдите площадь листа формата A1. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ: _____.

4 Найдите отношение длины большей стороны листа формата A2 к меньшей. Ответ округлите до десятых.

Ответ: _____.

5 Бумагу формата A5 упаковали в пачки по 500 листов. Найдите массу пачки, если масса бумаги площади 1 кв. м равна 80 г. Ответ дайте в граммах.

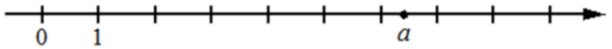
Ответ: _____.

6 Найдите значение выражения

$0{,}7 \cdot (-10)^3 - 4 \cdot (-10)^2 - 63.$

Ответ: _____.

7 На координатной прямой отмечено число a.



Какое из утверждений для этого числа является верным?

1) $a - 4 < 0$
2) $a - 6 > 0$
3) $6 - a > 0$
4) $7 - a < 0$

Ответ: ☐

8 Найдите значение выражения

$$\frac{a^{5{,}58} \cdot a^{2{,}9}}{a^{6{,}48}}$$

при $a = 7$.

Ответ: _____.

9 Найдите корень уравнения

$(x - 5)^2 = (x - 8)^2.$

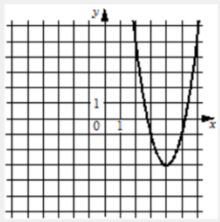
Ответ: _____.

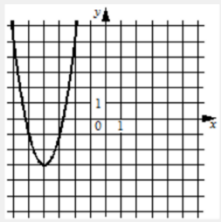
10 В магазине канцтоваров продаётся 84 ручки, из них 22 красных, 9 зелёных, 41 фиолетовая, остальные синие и чёрные, их поровну. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в этом магазине ручка будет красной или фиолетовой.

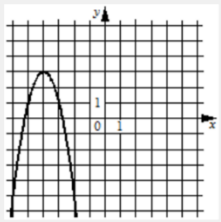
Ответ: _____.

11 Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

1) $y = 2x^2 - 16x + 29$

2) $y = 2x^2 + 16x + 29$

3) $y = -2x^2 - 16x - 29$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

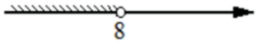
А	Б	В

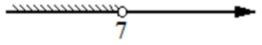
12 Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$,
где d_1 и d_2 – длины диагоналей четырёхугольника, α – угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_1, если $d_2 = 7$, $\sin\alpha = \frac{2}{7}$, а $S = 4$.

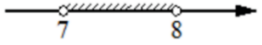
Ответ: _____.

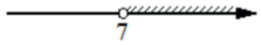
13 Укажите решение системы неравенств

$$\begin{cases} -35 + 5x < 0, \\ 6 - 3x > -18. \end{cases}$$

1) 

2) 

3) 

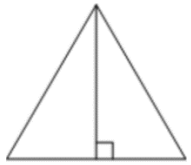
4) 

Ответ:

14 Курс воздушных ванн начинают с 15 минут в первый день и увеличивают время этой процедуры в каждый следующий день на 5 минут. В какой по счёту день продолжительность процедуры достигнет 1 часа?

Ответ: _____.

15 Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите высоту этого треугольника.



Ответ: _____.

16 Сторона равностороннего треугольника равна $20\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



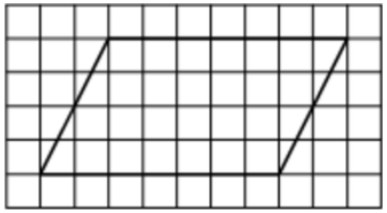
Ответ: _____.

17 Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 40.



Ответ: _____.

18 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

19 Какое из следующих утверждений верно?

1) Основания любой трапеции параллельны.
2) Все углы ромба равны.
3) Две окружности пересекаются, если радиус одной окружности больше радиуса другой окружности.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

20 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 4, \\ 2x^2 - y = 1. \end{cases}$$

21 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. Отдохнув, он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В.

22 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{при} \quad x \geq -4, \\ -\dfrac{16}{x} & \text{при} \quad x < -4. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

23 Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK = 6$, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC.

24 На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.

25 Окружности радиусов 25 и 100 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Составитель варианта — Евгений Пифагор	
Результаты:	Результаты моих учеников: • 53 человека набрали 100 баллов • 789 человек набрали 90+ баллов Личные результаты: • Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль • Высшее образование — ТГУ (Тольятти), 2009-2014 • Занял 1 место в трёх олимпиадах по высшей математике, 2009-2011 • 15 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
ВК:	https://vk.ru/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике

Часть 1

За правильный ответ на каждое из заданий 1–19 ставится 1 балл.

Номер задания	Правильный ответ	Текстовое решение	Видео решение
1	3421		
2	2		
3	4995,54; 5000		
4	1,4		
5	1250		
6	-1163	✍	▶
7	2	✍	▶
8	49	✍	
9	6,5	✍	▶
10	0,75	✍	▶
11	123	✍	▶
12	4	✍	▶
13	2	✍	▶
14	10		
15	21	✍	▶
16	10	✍	▶
17	6400	✍	▶
18	28	✍	▶
19	1	✍	▶
20	$(-1;1);(1;1)$	✍	▶
21	10	✍	▶
22	$\{0\}\cup[4;+\infty)$	✍	▶
23	4	✍	▶
24	■	✍	▶
25	80	✍	▶

Часть 2

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

20

Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 + y = 4, \\ 2x^2 - y = 1. \end{cases}$

E5E7B8

$y = 4 - 3x^2$

$5x^2 = 5$

$x^2 = 1$

$x = 1$

$y = 4 - 3 \cdot 1^2 = 1$

или

$x = -1$

$y = 4 - 3 \cdot (-1)^2 = 1$

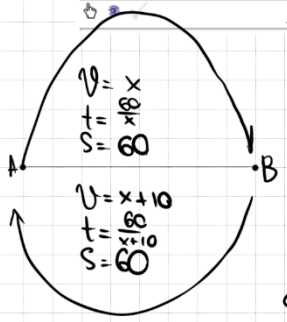
Ответ: $(-1;1)$; $(1;1)$

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

21

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. Отдохнув, он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В.

1A9BE7



$t_{подъем} - t_{спуск} = 3$

$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = 3$

$\frac{60x + 600 - 60x}{x^2 + 10x} = 3 \quad | : 3$

$\frac{200}{x^2 + 10x} = \frac{1}{1}$

$x^2 + 10x - 200 = 0$

$x_1 = 10$

$x_2 = -20$

Ответ: 10

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

22

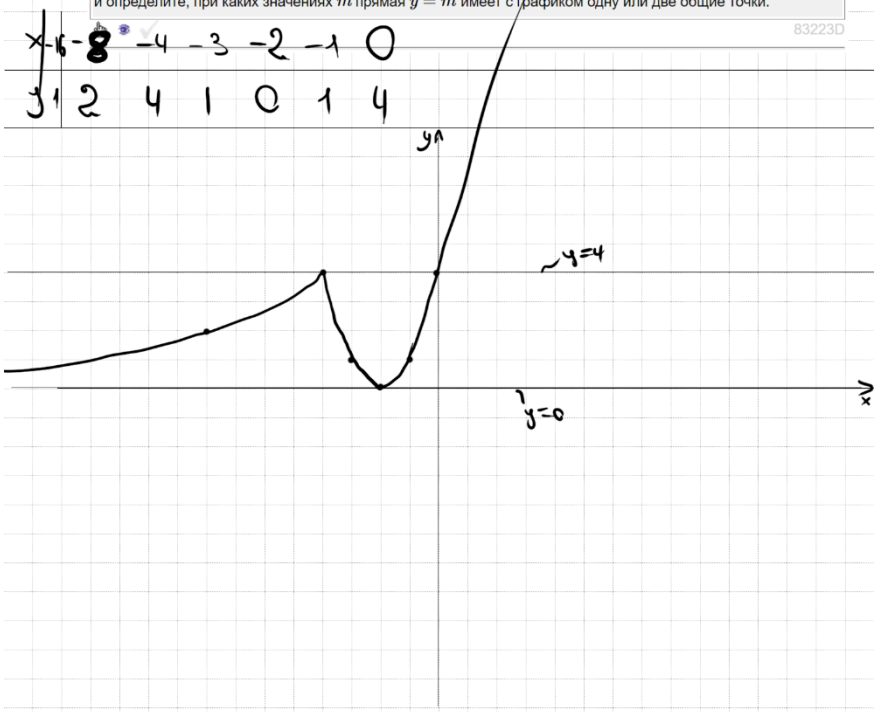
Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{при } x \geq -4, \\ -\frac{16}{x} & \text{при } x < -4. \end{cases}$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

83223D

$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$

x	-8	-4	-3	-2	-1	0
y	2	4	1	0	1	4



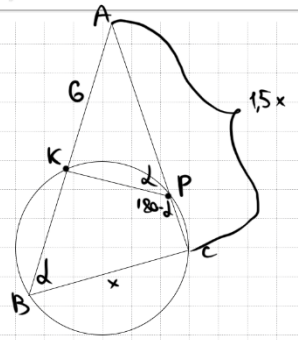
Ответ: $m \in \{0\} \cup [4; +\infty)$.

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

23

Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK = 6$, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC.

3A4E2D



① Пусть $\angle B = \alpha$
Тогда $\angle KPC = 180 - \alpha$
(т.к. $BKPC$ – вписан в окр.)

② $\angle APK = 180 - (180 - \alpha) = \alpha$

③ $\triangle AKP \sim \triangle ABC$ по 2 углам (A и α)

$\frac{6}{1,5x} = \frac{KP}{x}$ $\quad KP = \frac{6 \cdot x}{1,5x} = 4$

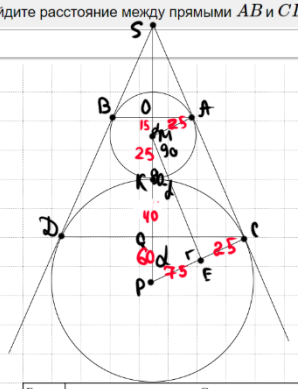
Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения, или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: 4

25

Окружности радиусов 25 и 100 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

057560



① $AMPC$ — $ME \parallel AC$

② $\triangle MPE$: $\cos\alpha = \frac{75}{125} = \frac{3}{5}$

③ $\triangle OMA$: $\cos\alpha = \frac{3}{5} = \frac{OM}{25}$
$\Rightarrow OM = 15$

④ $\triangle PQC$: $\cos\alpha = \frac{3}{5} = \frac{PQ}{100}$
$\Rightarrow PQ = 60$

⑤ $OQ = 15 + 25 + 40 = 80$

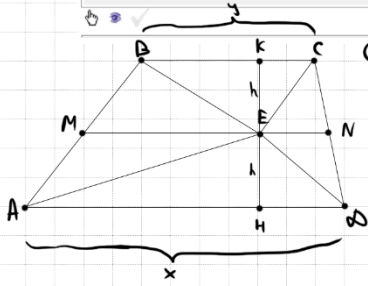
Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Ответ: 80

24

На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.

F57F67



① $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot h$
$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h$
$S_{BEC} + S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (x + y)$

② $S_{трап} = \frac{x+y}{2} \cdot 2h = h \cdot (x + y)$

$\Rightarrow S_{\triangle BEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} S_{трап}$ ■

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*