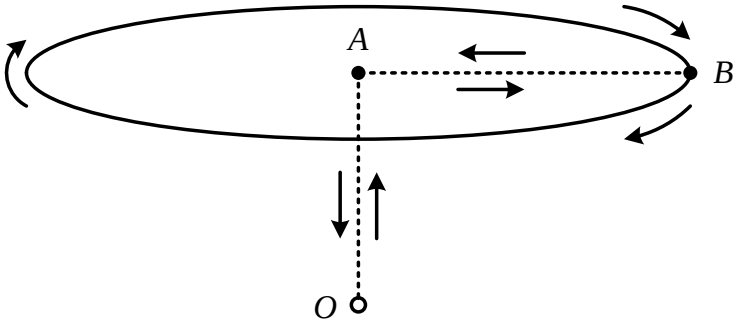
Задача 1 (10 баллов)

Условие:

Оператор запускает дрон с поверхности земли (точка O) вертикально вверх на высоту 300 м со средней скоростью v_O=10 м/с. Достигнув нужной высоты (точка A), дрон останавливается и начинает движение со средней скоростью v_A=20 м/с параллельно земле вдоль отрезка AB=3 км. Достигнув точки B, дрон снова останавливается и начинает выполнять программу по облету с целью видеофиксации периметра участка территории. Из точки B дрон начинает равноускоренное движение по круговой траектории обратно в точку B с угловым ускорением $\varepsilon_1=4\cdot10^{-6}$ рад/с^2. Сделав полный оборот вокруг центра A и вернувшись в точку B, дрон начинает замедляться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon_2=-2\cdot10^{-6}$ рад/с^2 пока не выполнит еще один полный оборот вокруг центра A круговой траектории до полной остановки в точке B. После этого дрон начинает движение со средней скоростью v_A параллельно земле вдоль отрезка BA и останавливается в точке A. Наконец, оператор возвращает дрон на поверхность земли из точки A в точку O со средней скоростью v_0. Определите полное время полета дрона с момента старта и посадки в точке O.



Решение:

Полное время полета дрона складывается из четырех составляющих:

$$t = 2t_O + 2t_A + t_1 + t_2,$$

где t_O – время влета из точки O в точку A (посадки из точки A в точку O), t_A – время движения вдоль радиуса AB круговой траектории, t_1 – время полного оборота с ускорением ε_1 и t_2 – время полного оборота с замедлением ε_2.

1) Времена t_O и t_A определяются элементарно:

$$t_O = \frac{OA}{v_O} = \frac{300\ [\text{м}]}{10\ [\text{м/с}]} = 30\ [\text{с}],$$

$$t_A = \frac{AB}{v_O} = \frac{3\,000\ [\text{м}]}{20\ [\text{м/с}]} = 150\ [\text{с}].$$

2) Время t_1 определится из кинематического уравнения вращательного движения:

$$\varphi_1 = \omega_{01}t_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}t_1^2,$$

где $\varphi_1 = 2\pi\ [\text{рад}]$ – угол полного оборота дрона вокруг центра A; $\omega_{01} = 0\ [\text{рад/с}]$ – начальная угловая скорость в точке B в начале первого оборота.

Тогда

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\varphi_1}{\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{4\pi\ [\text{рад}]}{4\cdot10^{-6}\ [\text{рад/с}^2]}} = \sqrt{\pi}\cdot10^3\ [\text{с}] \approx 1\,772{,}5\ [\text{с}]$$

3) Время t_2 определится также из кинематического уравнения вращательного движения:

$$\varphi_2 = \omega_{02}t_2 + \frac{\varepsilon_2}{2}t_2^2,$$

где $\varphi_2 = 2\pi\ [\text{рад}]$ – угол полного оборота дрона вокруг центра A; $\omega_{02} = \omega_1\ [\text{рад/с}]$ – начальная угловая скорость в точке B в начале второго оборота.

Угловая скорость дрона после первого оборота вокруг центра *A* определится по формуле угловой скорости при равноускоренном движении тела:

$$\omega_1 = \omega_{01} + \varepsilon_1 t_1 = 0 + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{2\varphi_1}{\varepsilon_1}} = \sqrt{2\varphi_1 \varepsilon_1} = 4\sqrt{\pi} \cdot 10^{-3} \text{ [рад/с]}$$

Тогда время t_2 найдем как решение квадратного уравнения:

$$\frac{\varepsilon_2}{2} t_2^2 + \omega_{02} t_2 - \varphi_2 = 0,$$
$$\frac{-2 \cdot 10^{-6}}{2} t_2^2 + 4\sqrt{\pi} \cdot 10^{-3} t_2 - 2\pi = 0,$$
$$-1 \cdot 10^{-6} t_2^2 + 4\sqrt{\pi} \cdot 10^{-3} t_2 - 2\pi = 0,$$
$$t_2^2 - 4\sqrt{\pi} \cdot 10^3 t_2 + 2\pi \cdot 10^6 = 0,$$

Решением данного квадратного уравнения является:

$$t_2 = \frac{4\sqrt{\pi} \cdot 10^3 \pm \sqrt{16\pi \cdot 10^6 - 8\pi \cdot 10^6}}{2} =$$
$$= \frac{4\sqrt{\pi} \cdot 10^3 \pm \sqrt{8\pi \cdot 10^6}}{2} = \frac{4\sqrt{\pi} \cdot 10^3 \pm 2\sqrt{2\pi} \cdot 10^3}{2} =$$
$$= 2\sqrt{\pi} \cdot 10^3 \pm \sqrt{2\pi} \cdot 10^3 = \left(2 \pm \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{\pi} \cdot 10^3 \text{ [с]}$$

Из условия $t_2 > t_1$ в качестве решения уравнения выбираем корень

$$t_2 = \left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{\pi} \cdot 10^3 \text{ [с]} \approx 6\,051{,}5 \text{ [с]}$$

4) Таким образом, полное время полета дрона с момента старта и посадки в точке *O* составит:

$$t = 2t_O + 2t_A + t_1 + t_2 = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 150 + 1\,772{,}5 + 6\,051{,}5 =$$
$$= 8\,184 \text{ [с]} = 2 \text{ [ч] } 16 \text{ [мин] } 24 \text{ [с]}$$

Задача 2 (20 баллов)

Условие:

Имеется неполный чертеж детали прибора, представленный на рисунке. На чертеже присутствует только вид сбоку (*I*) и сверху (*II*) и отсутствует вид спереди (*III*). Достройте вид детали спереди (*III*) по имеющимся двум другим. Определите площадь сечения *A*-*A* и объем детали.

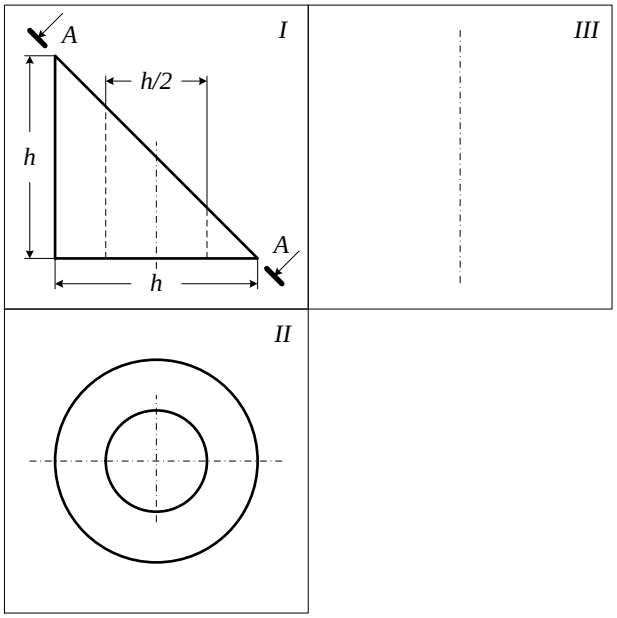
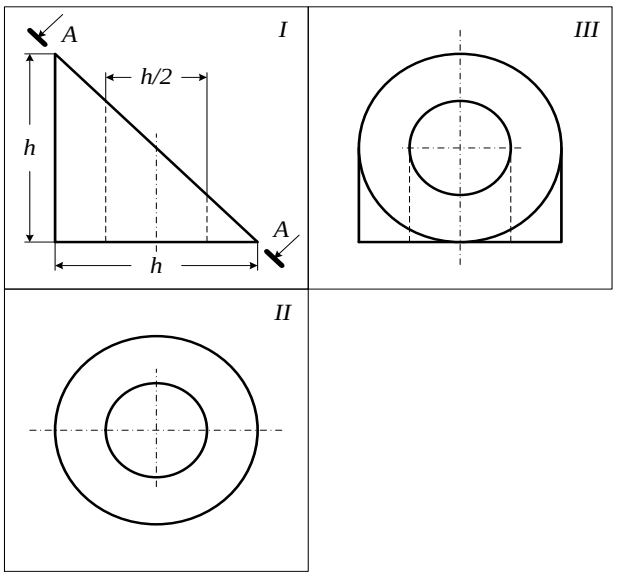


Рис. 1

Решение:

Чертеж детали прибора с видом спереди (*III*) приведен на рисунке:



Деталь представляет собой усеченный цилиндр с отверстием вдоль оси цилиндра. Объем такого цилиндра равен половине объема $V_{\text{ц}}$ цилиндра высотой h и радиусом основания $r_{\text{ц}}$=0,5h за вычетом объема $V_{\text{о}}$ отверстия, который равен половине объема цилиндра высотой h и радиусом основания $r_{\text{о}}$=0,25h:

$$V = \frac{1}{2}V_{\text{ц}} - \frac{1}{2}V_{\text{о}} = \frac{1}{2}\left(V_{\text{ц}} - V_{\text{о}}\right) = \frac{1}{2}\left(h \cdot 2\pi r_{\text{ц}} - h \cdot 2\pi r_{\text{о}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(h \cdot 2\pi \cdot 0{,}5h - h \cdot 2\pi \cdot 0{,}25h) = \frac{1}{2}(\pi h^2 - 0{,}5\pi h^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}5\pi h^2) = \frac{\pi}{4}h^2$$

Сечение *A-A* представляет собой кольцо в форме эллипса с малой полуосью $a = \frac{h}{2}$ и большей полуосью $b = \frac{\sqrt{2}}{2}h$. Отверстие кольца есть также эллипс с малой полуосью $a_{\text{о}} = \frac{h}{4}$ и большей полуосью $b_{\text{о}} = \frac{\sqrt{2}}{4}h$. Тогда площадь такого кольца $S = \pi ab - \pi a_{\text{о}}b_{\text{о}} = \frac{\sqrt{2}\pi h^2}{4} - \frac{\sqrt{2}\pi h^2}{16} = \frac{4\sqrt{2}\pi h^2}{16} - \frac{\sqrt{2}\pi h^2}{16} = \frac{3\sqrt{2}\pi h^2}{16}$.
Также площадь сечения *A-A* цилиндра плоскостью под углом α к оси цилиндра с радиусом основания r=0,5h и радиусом отверстия $r_{\text{о}}$=0,25h:
$S = \frac{\pi r^2}{\sin(\alpha)} - \frac{\pi r_{\text{о}}^2}{\sin(\alpha)} = \frac{\pi h^2}{4\sin(\alpha)} - \frac{\pi h^2}{16\sin(\alpha)} = \frac{3\pi h^2}{16\sin(\alpha)} = \frac{3\pi h^2}{16\sin(\frac{\pi}{4})} = \frac{6\pi h^2}{16\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}\pi h^2}{16}$.

Задача 3 (40 баллов)
Условие:
Имеется кусок PLA (полиактида – биоразлагаемого пластика) кубической формы массой 0,5 кг. Из этого куска пластика необходимо вытянуть нить круглого сечения диаметром 1,75 мм для 3D-принтера. Какой длины получится нить, если известно, что плотность PLA составляет 1,25 г/см^3? После этого из полученной нити необходимо напечатать сферу (полый шар) с толщиной стенки 2 мм для изготовления глобуса, при этом усадка при изготовлении изделий у PLA практически отсутствует. Какой высоты и объема получится сфера после печати?

Решение:
1) Объем куска PLA при его массе $m = 0{,}5$ кг $= 500$ г и плотности $\rho_{\text{PLA}} = 1{,}25$ г/см^3 составляет:

$$V_{\text{PLA}} = \frac{m_{\text{PLA}}}{\rho_{\text{PLA}}} = \frac{500\text{ г}}{1{,}25\frac{\text{г}}{\text{см}^3}} = 400\text{ см}^3 = 400000\text{ мм}^3$$

2) Длина нити при площади ее сечения $S = \pi d^2/4$, где $d = 1{,}75$ мм, составит:

$$L = \frac{V_{\text{PLA}}}{S} = \frac{V_{\text{PLA}}}{\pi d^2/4} = \frac{4 \cdot 400000 \text{ мм}^3}{\pi 1{,}75^2 \text{ мм}^2} \approx 166300 \text{ мм} = 166{,}3 \text{ м}$$

3) Обозначим через r [мм] внешний радиус сферы, тогда объем сферы определится по формуле:

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

Внутренний радиус сферы без учета толщины стенки составит r–2 [мм], тогда внутренний сферы определится по формуле:

$$V_0 = \frac{4\pi}{3}(r-2)^3 = \frac{4\pi}{3}(r^3 - 6r^2 + 12r - 8)$$

Объем стенок сферы равен:

$$V_{\text{PLA}} = V - V_0 = \frac{4\pi}{3} r^3 - \frac{4\pi}{3}(r^3 - 6r^2 + 12r - 8) =$$
$$= \frac{4\pi}{3}(6r^2 - 12r + 8)$$

Тогда, поделив левую и правую часть уравнения на $\frac{4\pi}{3}$, последовательно получим:

$$6r^2 - 12r + 8 = \frac{3V_{\text{PLA}}}{4\pi}$$
$$6r^2 - 12r + 8 = \frac{3 \cdot 400000}{4\pi}$$
$$6r^2 - 12r + 8 = \frac{300000}{\pi}$$
$$6r^2 - 12r + 8 - \frac{300000}{\pi} = 0$$
$$6r^2 - 12r - 95485 = 0$$

В итоге получаем квадратное уравнение относительно неизвестной r вида $ar^2 + br + c = 0$, где $a = 6$, $b = -12$, $c = -95485$.

Положительный корень уравнения определяется по формуле:

$$r = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \approx 127 \text{ [мм]}$$

Тогда высота сферы составит:

$$h = 2r \approx 254 \text{ [мм]} = 25{,}4 \text{ [см]}$$

Объем сферы составит:

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \approx 8{,}6 \text{ [л]}$$

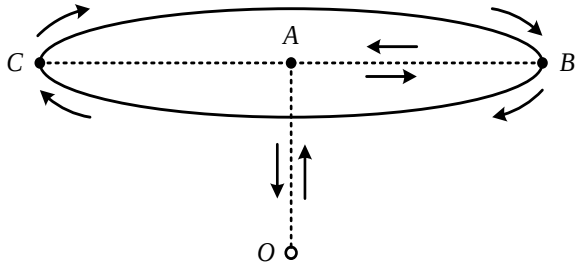
Задача 4 – Проектная (30 баллов)

Условие: Необходимо спроектировать упаковочную тару для размещения в ней 60 шариков для пинг-понга так, чтобы объем тары был минимальным. Стандартный размер шарика для пинг-понга, установленный Международной федерацией настольного тенниса (ITTF) в 2000 году, составляет 40 мм в диаметре. Необходимо рассмотреть различные варианты упаковки (в тару в форме цилиндра, куба, параллелепипеда), определить размеры получившихся упаковок и выбрать оптимальную из них.

Задача 1 (10 баллов)

Условие:

Оператор запускает дрон с поверхности земли (точка *O*) вертикально вверх на высоту 300 м со средней скоростью v_O=10 м/с. Достигнув нужной высоты (точка *A*), дрон останавливается и начинает движение со средней скоростью v_A=20 м/с параллельно земле вдоль отрезка *AB*=4 км. Достигнув точки *B*, дрон снова останавливается и начинает выполнять программу по облету с целью видеофиксации периметра участка территории. Из точки *B* дрон начинает равноускоренное движение по круговой траектории с линейным ускорением a_1=0,02 м/с^2. Сделав пол-оборота вокруг центра *A* и достигнув точки *C*, дрон начинает замедляться с постоянным линейным ускорением a_2=–0,01 м/с^2 пока не выполнит еще пол-оборота вокруг центра *A* круговой траектории до полной остановки в точке *B*. После этого дрон начинает движение со средней скоростью v_A параллельно земле вдоль отрезка *BA* и останавливается в точке *A*. Наконец, оператор возвращает дрон на поверхность земли из точки *A* в точку *O* со средней скоростью v_0. Определите полное время полета дрона с момента старта и посадки в точке *O*.



Задача 2 (20 баллов)

Условие:

Имеется неполный чертеж детали прибора, представленный на рисунке. На чертеже присутствует только вид сбоку (*I*) и сверху (*II*) и отсутствует вид спереди (*III*). Достройте вид детали спереди (*III*) по имеющимся двум другим. Определите площадь сечения *A-A* и объем детали.

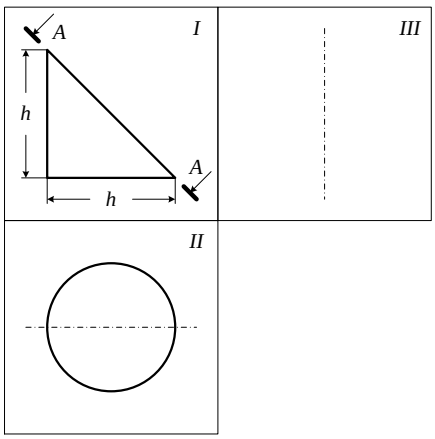


Рис. 1

Задача 3 (40 баллов)

Условие:

Имеется кусок PLA (полиактида – биоразлагаемого пластика) кубической формы массой 0,5 кг. Из этого куска пластика необходимо вытянуть нить круглого сечения диаметром 1,75 мм для 3D-принтера. Какой длины получится нить, если известно, что плотность PLA составляет 1,25 г/см^3? После этого из полученной нити необходимо напечатать сосуд цилиндрической формы с глухим дном и открытым верхом. Высота сосуда должна быть в два раза больше диаметра его основания, толщина дна и стенок сосуда – 2 мм, при этом усадка при изготовлении изделий у PLA практически отсутствует. Какой объем воды сможет вместить такая емкость?

Задача 4 – Проектная (30 баллов)

Условие: Спроектируйте емкость-непроливайку без использования дополнительных крышек и клапанов и т.п., из которой бы не вытекала жидкость при опрокидывании емкости набок, но из которой, тем не менее, можно было бы свободно налить жидкость, например, в стакан.

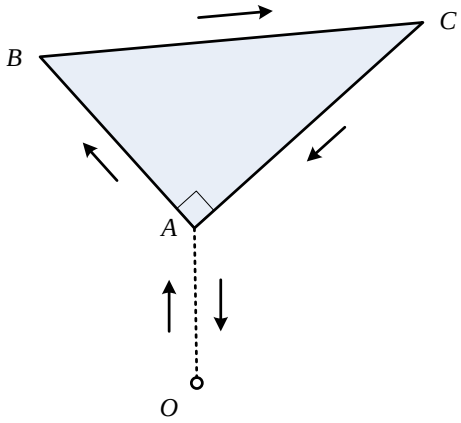


Задания, ответы и критерии оценивания

Задача 1 (10 баллов)

Условие:

Оператор запускает дрон с поверхности земли (точка *O*) вертикально вверх на высоту 300 м со средней скоростью v_O=10 м/с. Достигнув нужной высоты (точка *A*), дрон останавливается и начинает выполнять программу по облету с целью видеофиксации периметра участка территории формой в виде прямоугольного треугольника *ABC* с катетами *AB*=6 км и *AC*=8 км. Из точки *A* дрон начинает движение вдоль периметра треугольника *ABC* со средней скоростью v_A=20 м/с до остановки в точке *A*. После этого оператор возвращает дрон со средней скоростью v_O в точку старта *O* на поверхности земли. Определите полное время полета дрона с момента старта и посадки в точке *O*.



Справка:

Для прямоугольного треугольника *ABC* справедлива теорема Пифагора:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

где стороны *AB* и *AC*, прилегающие к прямому углу $\angle BAC$ треугольника, называются катетами, а сторона *BC* – гипотенузой.

Решение:

Время полета дрона из точки *O* в точку *A*, также как и обратно из точки *A* в точку O составит:

$$t_O = t_O = \frac{OA}{v_O} = \frac{300\ [\text{м}]}{10\ [\text{м/с}]} = 30\ [\text{с}]$$

Периметр треугольника *P* равен сумме его сторон, при этом длина гипотенузы треугольника *BC* равна:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 5\ [\text{км}]$$

Тогда

$$P = AB + BC + AC = 6 + 10 + 8 = 24\ [\text{км}]$$

Время полета дрона вдоль периметра треугольника составит:

$$t_P = \frac{P}{v_A} = \frac{24\ [\text{км}]}{20\ [\text{м/с}]} = \frac{24\ 000\ [\text{м}]}{20\ [\text{м/с}]} = 1\ 200\ [\text{с}]$$

Таким образом, полное время *t* полета дрона с момента старта и посадки в точке *O* определится как сумма:

$$t_P = 2t_O + t_P = 2 \cdot 30 + 1\ 200 = 1\ 260\ [\text{с}] = 21\ [\text{мин}]$$

Задача 2 (20 баллов)

Условие:

Условия предыдущей задачи.

1) Как изменится полное время полета дрона с момента старта и посадки в точке *O*, если площадь исследуемого участка территории (треугольника *ABC*) увеличится вдвое?

2) Какова в этом случае должна быть скорость дрона v_A, чтобы полное время полета дрона не изменилось после увеличения площади участка?

3) Как изменится полное время полета дрона с момента старта и посадки в точке *O*, если траекторию полета изменить на окружность круглого участка территории равновеликого исходному треугольному участку *ABC* с катетами *AB*=6 км и *AC*=8 км?

Решение:

1) Если площадь треугольника *ABC* увеличится вдвое, то его периметр увеличится в $\sqrt{2}$ раз, тогда время полета дрона t_2 вдоль периметра треугольника также увеличится в $\sqrt{2}$ раз и составит:

$$t_2 = t_P\sqrt{2} = 1\,200\sqrt{2} \approx 1\,697\ [\text{с}] = 28\ [\text{мин}]\ 17\ [\text{с}]$$

Следовательно, время полета дрона увеличится на

$$\Delta t = t_2 - t_P = 7\ [\text{мин}]\ 17\ [\text{с}]$$

2) Для того чтобы полное время полета не изменилось после увеличения площади участка скорость дрона v_A должна увеличится в те же $\sqrt{2}$ раз:

$$v'_A = v_A\sqrt{2} = 20\sqrt{2} \approx 28{,}3\ [\text{м/с}]$$

3) Площадь *S* треугольника *ABC* с катетами *AB*=6 км и *AC*=8 км, составляет половину площади прямоугольника со сторонами *AB* и *AC*:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot BC = 24\ [\text{км}^2]$$

Равновеликий данному треугольнику круг имеет окружность длиной

$$L = 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2\sqrt{\pi S} = 2\sqrt{24\pi} \approx 17{,}366\ [\text{км}] = 17\,366\ [\text{м}]$$

Следовательно, время полета дрона уменьшится на

$$\Delta t = t_P - t_L = \frac{P}{v_A} - \frac{L}{v_A} = \frac{P-L}{v_A} = \frac{(24\,000 - 17\,366)\ [\text{м}]}{20\ [\text{м/с}]} \approx$$
$$\approx 332\ [\text{с}] = 5\ [\text{мин}]\ 32\ [\text{с}]$$

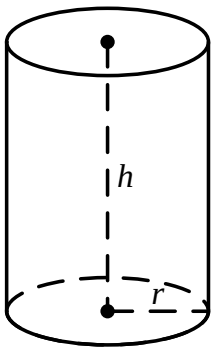
Задача 3 (40 баллов)

Условие:

Имеется кусок PLA (полиактида – биоразлагаемого пластика) кубической формы массой 0,5 кг. Из этого куска пластика необходимо вытянуть нить круглого сечения диаметром 1,75 мм для 3D-принтера. Какой длины получится нить, если известно, что плотность PLA составляет 1,25 г/см^3? После этого из полученной нити необходимо напечатать полый куб с толщиной стенки 2 мм, при этом усадка при изготовлении изделий у PLA практически отсутствует. Во сколько раз больший по объему куб по сравнению с заготовкой получится после печати?

Справка:

1) Геометрически нить для 3D-принтера представляет собой цилиндр радиусом основания *r* и высотой (или длиной нити в данной задаче) *h*:



Объем цилиндра равен произведению площади основания (площади круга радиусом *r*) на высоту цилиндра *h*.

2) Квадратное уравнение относительно неизвестной *x* вида $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, определяемые по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Решение:
1) Объем куска PLA при его массе $m = 0{,}5$ кг $= 500$ г и плотности $\rho_{\text{PLA}} = 1{,}25$ г/см^3 составляет:

$$V_{\text{PLA}} = \frac{m_{\text{PLA}}}{\rho_{\text{PLA}}} = \frac{500 \text{ г}}{1{,}25 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}} = 400 \text{ см}^3 = 400000 \text{ мм}^3$$

2) Длина нити при площади ее сечения $S = \pi d^2/4$, где $d = 1{,}75$ мм, составит:

$$L = \frac{V_{\text{PLA}}}{S} = \frac{V_{\text{PLA}}}{\pi d^2/4} = \frac{4 \cdot 400000 \text{ мм}^3}{\pi 1{,}75^2 \text{ мм}^2} \approx 166300 \text{ мм} = 166{,}3 \text{ м}$$

3) Обозначим через *x* [мм] длину ребра полого куба, тогда его наружный объем определится по формуле:

$$V = x^3$$

Внутренняя полость куба представляет собой тоже куб с длиной ребра без учета толщины стенки *r*–4 [мм], тогда его объем определится по формуле:

$$V_0 = (x-4)^3 = (x^3 - 12x^2 + 48x - 64)$$

Объем стенок полого куба равен:

$$V_{\text{PLA}} = V - V_0 = x^3 - (x^3 - 12x^2 + 48x - 64) = \\ = 12x^2 - 48x + 64$$

Приведем уравнение к виду $ar^2 + br + c = 0$, последовательно получим:

$$12x^2 - 48x + 64 = V_{\text{PLA}}$$
$$12x^2 - 48x + 64 = 400000$$
$$12x^2 - 48x + 64 - 400000 = 0$$
$$12x^2 - 48x - 399936 = 0$$

В итоге получаем квадратное уравнение относительно неизвестной *x* вида, где $a = 12$, $b = -48$, $c = -399936$.

Положительный корень уравнения определяется по формуле:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \approx 184{,}6 \text{ [мм]}$$

Тогда объем полого куба составит:

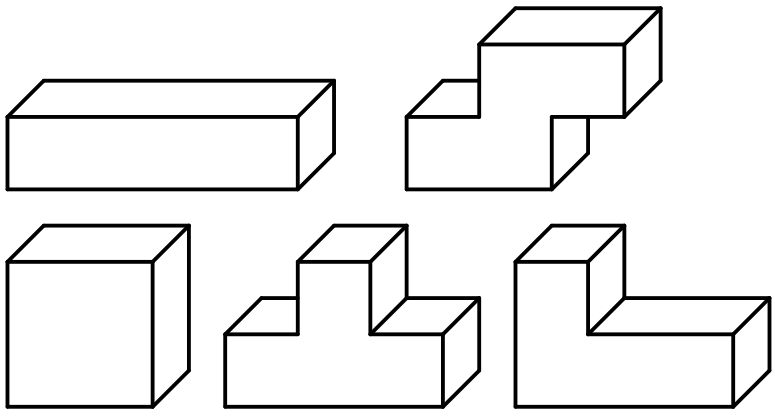
$$V = x^3 \approx 6\,290\,644 \text{ [мм}^3\text{]} \approx 6{,}29 \text{ [л]}$$

Отношение объема полого куба к объему заготовки PLA составит:

$$\frac{V}{V_{\text{PLA}}} = \frac{6{,}29 \text{ [л]}}{0{,}4 \text{ [л]}} \approx 15{,}7$$

Задача 4 – Проектная (30 баллов)

Условие: Условие предыдущей задачи. Спроектируйте для печати на 3D-принтере набор из объемных фигурок для пазла «Тетрис». Минимальная толщина стенок изделия из PLA составляет 1 мм. Определите необходимое количество и размеры фигурок разных видов так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник для упаковывания пазла в плоскую картонную коробку. Фигурка каждого вида представляет собой цельную комбинацию из четырех одинаковых кубиков как показано на рисунке. Общее количество фигурок в наборе должно быть не менее 30, а количество фигурок каждого вида должно быть примерно одинаковым.



Виды фигурок для паззла «Тетрис»

Методика определения баллов за решение задач проектного типа с произвольными вариантами решений

Оценка проектной части производится по следующим четырем критериям:

1. Логика изложения: описание того, как получена идея; описание решений по ее воплощению. Максимум 10 баллов.
2. Наличие, качество и достаточность схем и рисунков. Максимум 10 баллов.
3. Детализация, пояснение и правильность математических расчетов. Максимум 5 баллов.
4. Общее качество оформления решения задачи, грамотность изложения. Максимум 5 баллов.