Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Решите уравнение $x^2 - 30y^2 = 1$ в простых числах.

Ответ: $x = 11, y = 2$.

Решение. Имеем $x = 2k + 1$, $x^2 = 4k^2 + 4k + 1$, подставляя в уравнение, получим $2k^2 + 2k = 15y^2$. Поэтому y чётное, но есть только одно чётное простое – это 2. Тогда $x = 11$.

Критерии оценивания: Полное решение 11 баллов. Доказано, что x нечётное 2 балла, что y чётное – еще 6 баллов. Если правильный ответ получен частичным перебором – не более 4 баллов. Угадан ответ 2 балла.

2. (*13 баллов*) Пусть

$$P_n(x) = (x^2 - x + 1) \cdot (x^4 - x^2 + 1) \cdot \ldots \cdot \left(x^{2^n} - x^{2^{n-1}} + 1\right).$$

Установите, что больше: $P_{12}(2)$ или 10^{2400}?

Ответ: $P_{12}(2) > 10^{2400}$.

Решение. Непосредственно проверяется тождество:

$$\left(x^{2^k} + x^{2^{k-1}} + 1\right) \cdot \left(x^{2^k} - x^{2^{k-1}} + 1\right) = x^{2^{k+1}} + x^{2^k} + 1. \qquad (1)$$

Поэтому

$$P_n(x) = \frac{(x^2+x+1) \cdot P_n(x)}{x^2+x+1} = \frac{x^{2^{n+1}} + x^{2^n} + 1}{x^2+x+1}. \qquad (2)$$

Тогда

$$P_{12}(2) = \frac{2^{2^{13}} + 2^{2^{12}} + 1}{7} > \frac{2^{2^{13}}}{7} = \frac{2^{8192}}{7} = \frac{2^{10 \cdot 800} \cdot 2^{192}}{7} > (2^{10})^{800} >$$

$$> (10^3)^{800} = 10^{2400}.$$

Критерии оценивания. Полное обоснованное решение 13 баллов. **Выведено** тождество (1) 5 баллов. **Доказана** в общем виде формула (2) 5 баллов (не доказана, но представлена – 2 балла). Построена верная оценка – 3 балла. Угадан ответ 2 балла.

3. (*13 баллов*) Буратино и Пьеро пришли в гости к Мальвине. Мальвина для них приготовила угощенье: пиццу, тортик и кувшин с компотом. Известно, что Пьеро может съесть пиццу за 9 минут, тортик за 15 минут и выпить кувшин компота за 14 минут, а Буратино может все это сделать за 7, 5 и 7 минут соответственно. За какое наименьшее время они завершат трапезу?

Ответ: за 11 минут.

Решение. Чтобы время было наименьшим, Буратино и Пьеро должны начать трапезу и закончить её одновременно, в противном случае один из них может помочь другому и уменьшить время.

Обозначим: a – доля пиццы, b – доля торта, с – доля компота, которые съел Пьеро. Тогда $1-a$ – доля пиццы, $1-b$ – доля торта, $1-$с – доля компота, которые съел Буратино. Время, затраченное ими на трапезу:

$$t = 9a + 15b + 14c = 7(1-a) + 5(1-b) + 7(1-c).$$

Время должно быть минимальным при $0 \le a \le 1, 0 \le b \le 1, 0 \le c \le 1$.

$$16a + 20b + 21c = 19 \Rightarrow c = \frac{19 - 16a - 20b}{21}.$$

Получаем $t = \frac{38-5a+5b}{3}$. Тогда t – наименьшее, если a – наибольшее, а b – наименьшее, то есть $a = 1, b = 0$. Итак, $t = 11$ при $c = \frac{1}{7} \in [0; 1]$.

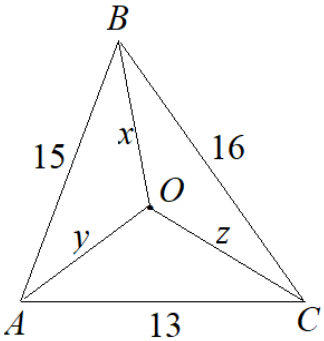
Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Не сказано, что трапеза должна начинаться и заканчиваться одновременно всеми участниками – минус 2 балла. *Решение с выбором оптимальной стратегии:* С помощью рассуждений о скорости поедания продуктов выбрана правильная стратегия, но не доказана её оптимальность – не более 6 баллов. *Решение с составлением функции:* Составлена с полным обоснованием правильная математическая модель, включающая в себя функцию и её область определения – ставится 6 баллов. Имеется обоснование того, при каких переменных и почему достигается наименьшее значение + 4 балла; проверено, что оптимальное решение попадает в допустимое множество – ещё 3 балла. При верном и обоснованном ходе решения допущена вычислительная оценка – минус 2 балла. Угадан ответ 2 балла.

4. (*13 баллов*) Найдите $xy + 2yz + \sqrt{3}xz$, где x, y, z положительные числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 169, \\ x^2 + xz + z^2 = 256, \\ x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 225. \end{cases}$$

Ответ. $24\sqrt{231}$.

Решение. Рассмотрим треугольник со сторонами 13, 15, 16. Точка O находится внутри треугольника, так как $\angle AOB = 150°, \angle BOC = 120°$, $\angle COA = 90°$ и $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 150° + 90° + 120° = 360°$.



Тогда, каждое из уравнений системы является реализацией теоремы косинусов для треугольников AOC, BOC и BOA соответственно. То есть $AC^2 = y^2 + z^2 = 169$, $BC^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cdot \cos 120° = x^2 + xz + z^2 = 256$,

$AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 150° = x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 225$.

Геометрически искомое выражение $xy + 2yz + \sqrt{3}xz = 4 \cdot S_{\Delta ABC}$. Имеем $4 \cdot S_{\Delta ABC} = 4 \cdot S_{\Delta AOB} + 4 \cdot S_{\Delta AOC} + 4 \cdot S_{\Delta BOC} =$

$$= 2 \cdot xy \cdot \sin 150° + 2 \cdot yz + 2 \cdot xz \cdot \sin 120° = xy + 2yz + \sqrt{3}xz.$$

Вычислим площадь треугольника ABC по формуле Герона. Так как $p = 22$, то $S_{\Delta ABC} = \sqrt{22 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6} = 6\sqrt{231}$.

Критерии оценивания. Для каждого уравнения представлен его геометрический образ с полной его характеристикой – 3 балла; доказано, что все три треугольника можно объединить в один и общая вершина будет лежать внутри большого треугольника – ещё 3 балла; доказано, что искомое выражение равно четырём площадям большого треугольника – ещё 3 балла. Верно найдена площадь большого треугольника – ещё 2 балла. Полное обоснованное решение 13 баллов. При верном и обоснованном ходе решения допущена вычислительная оценка – минус 2 балла. Угадан ответ 2 балла.

5. *(10 баллов)* Тонкий стержень стоит на некотором расстоянии от тонкой линзы перпендикулярно главной оптической оси. При этом формируется изображение, которое в ***x*** раз отличается по размерам от этого стержня. После того как стержень сдвинули вдоль главной оптической оси на некоторое расстояние от линзы, получили изображение, опять отличающееся по размерам в ***x*** раз по сравнению с предметом. После этого стержень еще раз подвинули в ту же сторону на тоже самое расстояние. И снова размер изображения в ***x*** раз отличается от размера предмета. Определите ***x***.

Решение:

Формула тонкой линзы, с учетом того, что увеличение $\Gamma = \frac{f}{d}$, для первой ситуации:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{xd}$. **(2 балла)**

Для второй:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{d+s} + \frac{1}{x(d+s)}$. **(2 балла)**

Для третьей:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{d+2s} + \frac{x}{d+2s}$. **(2 балла)**

Решая эту систему, получаем уравнение:

$x^2 = 3$. **(2 балла)**

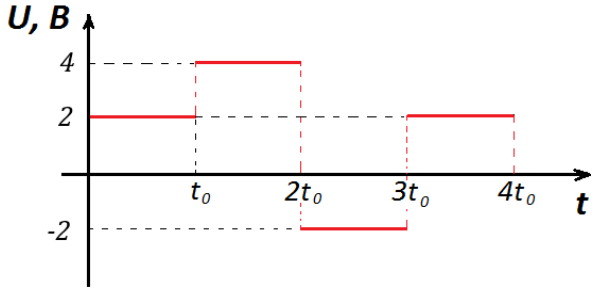
В результате: $x \approx 1{,}73$ **(2 балла)**

Ответ: ≈1,73

Примечания:

1. Правильный ответ без решения, т.е. при отсутствии формул, выводов, не оценивается
2. Попадались условия с некорректной формулировкой (описывалась ситуация, невозможная в реальности). Ответы «Решения нет» или «Ситуация невозможна» оценивались полным баллом только при наличии полного объяснения почему был дан такой ответ.
3. Если участник не увидел некорректности условия и рассматривал предложенную ситуацию, то данный вариант решения оценивался согласно критериям. При доведенном до конца решении, он получал полный балл.
4. В правильном решении (неважно, рассматривалась корректная или некорректная ситуация) одна из формул должна содержать ситуацию с полученным мнимым изображением.

6. *(10 баллов)* Напряжение в цепи изменяется по закону, который показан на графике. Далее цикл повторяется. Определите действующее напряжение в данной цепи.



Решение:

Общее количество теплоты, выделяемое за время $4t_0$:

$$Q = \frac{U_1^2}{R}t_0 + \frac{U_2^2}{R}t_0 + \frac{U_3^2}{R}t_0 + \frac{U_4^2}{R}t_0 = \frac{4}{R}t_0 + \frac{16}{R}t_0 + \frac{4}{R}t_0 + \frac{4}{R}t_0 = \frac{28}{R}t_0. \qquad \textbf{(4 балла)}$$

Получаем:

$$Q = \frac{U_{\text{действ}}^2}{R}4t_0. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Окончательный результат:

$$U_{\text{действ}} = \sqrt{\frac{28}{4}} \approx 2{,}65 \text{ В}. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Ответ: ≈2,65 В

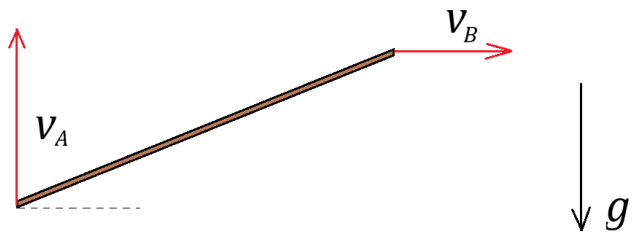
Примечания:

1. Полный балл выставлялся только при наличии вывода формулы для действующего напряжения. Данный вывод должен опираться на определение действующего напряжения через количество теплоты или мощность, выделяемую в цепи

2. Если решение не содержит подобного вывода, а начинается с готовой формулы (через интеграл или через сумму квадратов), то баллы выставляются только за правильный ответ. Максимально возможный балл в этом случае равен 3.

3. Ответ, указанный без размерности, не является правильным

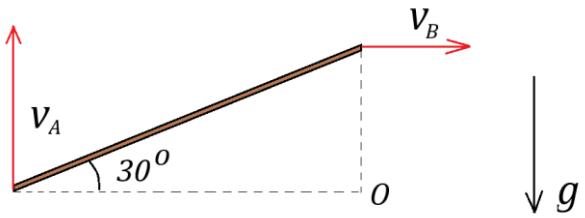
7. *(15 баллов)* Хозяин, выгуливая собаку, бросил ей в качестве апорта прямую однородную палку. Она полетела, вращаясь в вертикальной плоскости. В определенный момент времени скорости концов полки оказались равны $v_A=2\sqrt{3}$ м/с и $v_B=2$ м/с. При этом одна из них направлена строго горизонтально, а вторая – строго вертикально вверх (см. рис).



В этот момент времени палка находилась на высоте H=5 м от земли. Считать, что размер палки намного меньше высоты H. Сколько времени палке еще лететь до земли? Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

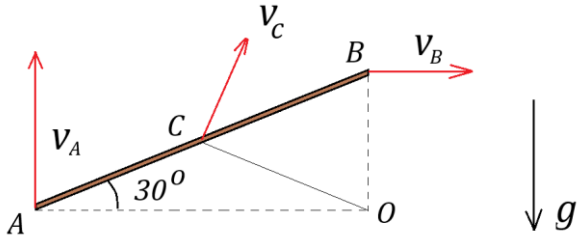
Решение:

В точке O находится мгновенная ось вращения. **(2 балла)**



Из соотношения между скоростями следует, что в данный момент времени палка расположена под углом 30^O к горизонту. **(2 балла)**

Найдем скорость центра палки:



Треугольник COB – равносторонний, CO=OB. Получаем, что:

$v_C = v_B = 2$ м/с. **(2 балла)**

При этом скорость центра палки направлена под углом 60^O к горизонту. **(2 балла)**

Уравнение движения для центра палки:

$y = H + v_C \sin 60^O \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. **(2 балла)**

$0 = 5 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t - \frac{10t^2}{2}$. **(2 балла)**

Получаем, что палке еще лететь $t \approx 1{,}19$ с. **(3 балла)**

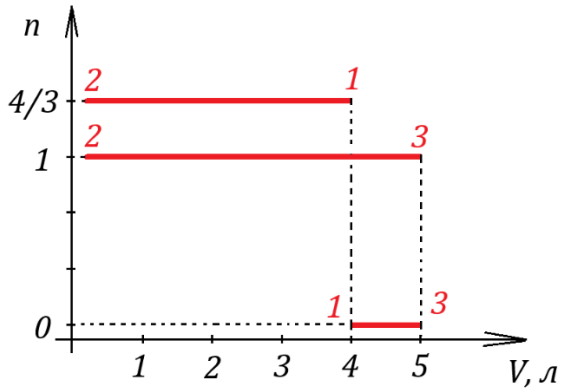
Ответ: ≈1,19 с

Примечания:

1. Ответ без указания единиц измерения не засчитывается
2. Утверждение, что скорость центра масс палки можно найти как среднюю арифметическую всего двух точек (концов палки) необходимо доказывать. При отсутствии доказательства этого утверждения максимально возможный балл за задачу равен 9-ти.

8. *(15 баллов)* Политропический процесс – процесс, при котором теплоемкость газа остается неизменной. Уравнение подобного процесса pV^n=const, где n – показатель политропы.

Один моль многоатомного газа в качестве рабочего тела тепловой машины участвует в цикле 1-2-3-1. Дан график зависимости показателя политропы n от объема, занимаемого газом. Найдите КПД цикла 1-2-3-1, если температура в точке 1 равна T_1=300 К, а тепло, подведенное в процессе 2-3, равно Q_{23}=8310 Дж. Универсальная газовая постоянная R=8,31 Дж/моль·К.



Решение:

КПД цикла:

$\eta = \frac{Q}{Q_+} = \frac{Q_{12}+Q_{23}+Q_{31}}{Q_+}$.

$n_{12} = 4/3 = \gamma$, показатель адиабаты для многоатомного газа, следовательно, процесс 12 адиабатный:

$Q_{12} = 0$. **(2 балла)**

$n_{23} = 1$, следовательно, процесс 23 изотермический, Q_{23} дано в условии. **(2 балла)**

$n_{31} = 0$, следовательно, процесс 31 изобарный. **(2 балла)**

$Q_{31} = p\Delta V + \Delta U = p(V_1 - V_3) + \frac{i}{2}(pV_1 - pV_3) = \frac{i+2}{2}p(V_1 - V_3)$. **(2 балла)**

$V_1 < V_3$, следовательно, $Q_{31} < 0$. Тогда $Q_+ = Q_{23}$.

Закон Менделеева-Клапейрона для газа в состоянии 1:

$pV_1 = \nu RT_1$,

отсюда $Q_{31} = \frac{i+2}{2}\nu RT_1\left(1 - \frac{V_3}{V_1}\right)$. **(2 балла)**

$\eta = \frac{Q_{23}+Q_{31}}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{31}}{Q_{23}} = 1 + \frac{i+2}{2}\frac{\nu RT_1}{Q_{23}}\left(1 - \frac{V_3}{V_1}\right)$. **(2 балла)**

Для многоатомного газа $i = 6$. **(1 балл)**

$\eta = 0{,}7 = 70\ \%$. **(2 балла)**

Ответ: 70%

Вариант 2
Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Решите уравнение $x^2 - 42y^2 = 1$ в простых числах.

Ответ: $x = 13, y = 2$.

Решение. Имеем $x = 2k + 1$, $x^2 = 4k^2 + 4k + 1$, подставляя в уравнение, получим $2k^2 + 2k = 21y^2$. Поэтому y чётное, но есть только одно чётное простое – это 2. Тогда $x = 13$.

Критерии оценивания: Полное решение 11 баллов. Доказано, что x нечётное 2 балла, что y чётное – еще 6 баллов. Если правильный ответ получен частичным перебором – не более 4 баллов. Угадан ответ 2 балла.

2. (*13 баллов*) Пусть

$$P_n(x) = (x^2 - x + 1) \cdot (x^4 - x^2 + 1) \cdot \ldots \cdot \left(x^{2^n} - x^{2^{n-1}} + 1\right).$$

Установите, что больше: $P_{11}(2)$ или 10^{1200}?

Ответ: $P_{11}(2) > 10^{1200}$.

Решение. Непосредственно проверяется тождество:

$$\left(x^{2^k} + x^{2^{k-1}} + 1\right) \cdot \left(x^{2^k} - x^{2^{k-1}} + 1\right) = x^{2^{k+1}} + x^{2^k} + 1. \qquad (1)$$

Поэтому

$$P_n(x) = \frac{(x^2+x+1) \cdot P_n(x)}{x^2+x+1} = \frac{x^{2^{n+1}} + x^{2^n} + 1}{x^2+x+1}. \qquad (2)$$

Тогда

$$P_{11}(2) = \frac{2^{2^{12}} + 2^{2^{11}} + 1}{7} > \frac{2^{2^{12}}}{7} = \frac{2^{4096}}{7} = \frac{2^{10 \cdot 400} \cdot 2^{96}}{7} > (2^{10})^{400} > (10^3)^{400} = 10^{1200}.$$

Критерии оценивания. Полное обоснованное решение 13 баллов. **Выведено** тождество (1) 5 баллов. **Доказана** в общем виде формула (2) 5 баллов (не доказана, но представлена – 2 балла). Построена верная оценка – 3 балла. Угадан ответ 2 балла.

3. (*13 баллов*) Пятачок и Винни Пух пришли в гости к Кролику. Кролик для них приготовил угощенье: банку мёда, торт и кастрюлю с компотом. Известно, что Пятачок может съесть банку мёда за 10 минут, торт за 13 минут и выпить кастрюлю компота за 14 минут, а Винни Пух может все это сделать за 6, 6 и 7 минут соответственно. За какое наименьшее время они завершат трапезу?

Ответ: за 12 минут.

Решение. Чтобы время было наименьшим, Пятачок и Винни Пух должны начать трапезу и закончить её одновременно, в противном случае один из них может помочь другому и уменьшить время.

Обозначим: a – доля мёда, b – доля торта, с – доля компота, которые съел Пятачок. Тогда $1-a$ – доля мёда, $1-b$ – доля торта, $1-$ с – доля компота, которые съел Винни Пух. Время, затраченное ими на трапезу:

$$t = 10a + 13b + 14c = 6(1-a) + 6(1-b) + 7(1-c).$$

Время должно быть минимальным при $0 \le a \le 1, 0 \le b \le 1, 0 \le c \le 1$.

$$16a + 19b + 21c = 19 \Rightarrow c = \frac{19 - 16a - 19b}{21}.$$

Получаем $t = \frac{38-2a+b}{3}$. Тогда наименьшее t, если a – наибольшее, то есть $a = 1$, а b – наименьшее, то есть $b = 0$. Итак, $t = 12$ при $c = \frac{1}{7} \in [0;1]$.

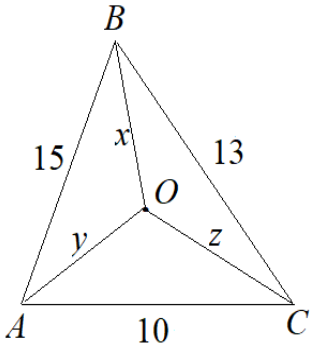
Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Не сказано, что трапеза должна начинаться и заканчиваться одновременно всеми участниками – минус 2 балла. *Решение с выбором оптимальной стратегии:* С помощью рассуждений о скорости поедания продуктов выбрана правильная стратегия, но не доказана её оптимальность – не более 6 баллов. *Решение с составлением функции:* Составлена с полным обоснованием правильная математическая модель, включающая в себя функцию и её область определения – ставится 6 баллов. Имеется обоснование того, при каких переменных и почему достигается наименьшее значение + 4 балла; проверено, что оптимальное решение попадает в допустимое множество – ещё 3 балла. При верном и обоснованном ходе решения допущена вычислительная оценка – минус 2 балла. Угадан ответ 2 балла.

4. (*13 баллов*) Найдите $xy + 2yz + \sqrt{3}xz$, где x, y, z положительные числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 100, \\ x^2 + xz + z^2 = 169, \\ x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 225. \end{cases}$$

Ответ: $24\sqrt{114}$.

Решение. Рассмотрим треугольник со сторонами 10, 13, 15. Точка O находится внутри треугольника, так как $\angle AOB = 150°$, $\angle BOC = 120°$, $\angle COA = 90°$ и $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 150° + 90° + 120° = 360°$.



Тогда, каждое из уравнений системы является реализацией теоремы косинусов для треугольников AOC, BOC и BOA соответственно. То есть $AC^2 = y^2 + z^2 = 100$, $BC^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cdot \cos 120° = x^2 + xz + z^2 = 169$,

$AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 150° = x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 225.$

Геометрически искомое выражение $xy + 2yz + \sqrt{3}xz = 4 \cdot S_{\Delta ABC}$. Имеем

$$4 \cdot S_{\Delta ABC} = 4 \cdot S_{\Delta AOB} + 4 \cdot S_{\Delta AOC} + 4 \cdot S_{\Delta BOC} =$$

$$= 2 \cdot xy \cdot \sin 150° + 2 \cdot yz + 2 \cdot xz \cdot \sin 120° = xy + 2yz + \sqrt{3}xz.$$

Вычислим площадь треугольника ABC по формуле Герона. Так как $p = 19,$ то $S_{\Delta ABC} = \sqrt{19 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9} = 6\sqrt{114}.$

Критерии оценивания. Для каждого уравнения представлен его геометрический образ с полной его характеристикой – 3 балла; доказано, что все три треугольника можно объединить в один и общая вершина будет лежать внутри большого треугольника – ещё 3 балла; доказано, что искомое выражение равно четырём площадям большого треугольника – ещё 3 балла. Верно найдена площадь большого треугольника – ещё 2 балла. Полное обоснованное решение 13 баллов. При верном и обоснованном ходе решения допущена вычислительная оценка – минус 2 балла. Угадан ответ 2 балла.

5. *(10 баллов)* Тонкий стержень стоит на некотором расстоянии от тонкой линзы перпендикулярно главной оптической оси. При этом формируется изображение, которое в $\boldsymbol{x}$ раз отличается по размерам от этого стержня. После того как стержень сдвинули вдоль главной оптической оси на некоторое расстояние от линзы, получили изображение, опять отличающееся по размерам в $\boldsymbol{x}$ раз по сравнению с предметом. После этого стержень еще раз подвинули в ту же сторону на тоже самое расстояние. И снова размер изображения в $\boldsymbol{x}$ раз отличается от размера предмета. Определите $\boldsymbol{x}$.

Решение:

Формула тонкой линзы, с учетом того, что увеличение $\Gamma = \frac{f}{d}$, для первой ситуации:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{xd}$. **(2 балла)**

Для второй:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{d+s} + \frac{1}{x(d+s)}$. **(2 балла)**

Для третьей:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{d+2s} + \frac{x}{d+2s}$. **(2 балла)**

Решая эту систему, получаем уравнение:

$x^2 = 3$. **(2 балла)**

В результате: $x \approx 1{,}73$ **(2 балла)**

Ответ: ≈1,73

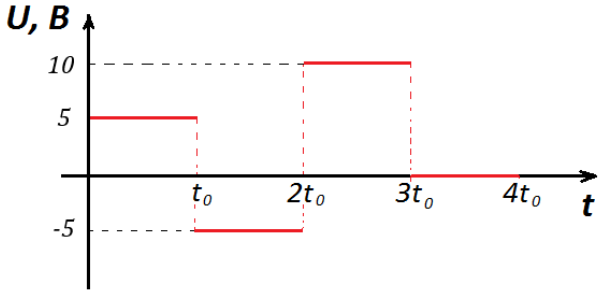
Примечания:

1. **Правильный ответ без решения, т.е. при отсутствии формул, выводов, не оценивается**
2. **Попадались условия с некорректной формулировкой (описывалась ситуация, невозможная в реальности). Ответы «Решения нет» или «Ситуация**

невозможна» оценивались полным баллом только при наличии полного объяснения почему был дан такой ответ.

3. **Если участник не увидел некорректности условия и рассматривал предложенную ситуацию, то данный вариант решения оценивался согласно критериям. При доведенном до конца решении, он получал полный балл.**
4. **В правильном решении (неважно, рассматривалась корректная или некорректная ситуация) одна из формул должна содержать ситуацию с полученным мнимым изображением.**

6. *(10 баллов)* Напряжение в цепи от 0 до $4t_0$ изменяется по закону, который показан на графике. Далее цикл повторяется. Определите действующее напряжение в данной цепи.



Решение:

Общее количество теплоты, выделяемое за время $4t_0$:

$$Q = \frac{U_1^2}{R}t_0 + \frac{U_2^2}{R}t_0 + \frac{U_3^2}{R}t_0 + \frac{U_4^2}{R}t_0 = \frac{25}{R}t_0 + \frac{25}{R}t_0 + \frac{100}{R}t_0 + \frac{0}{R}t_0 = \frac{150}{R}t_0. \qquad \textbf{(4 балла)}$$

Получаем:

$$Q = \frac{U_{\text{действ}}^2}{R}4t_0. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Окончательный результат:

$$U_{\text{действ}} = \sqrt{\frac{150}{4}} \approx 6{,}12 \text{ В}. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

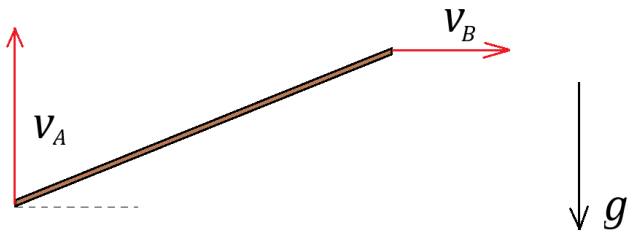
Ответ: ≈6,12 В

Примечания:

1. **Полный балл выставлялся только при наличии вывода формулы для действующего напряжения. Данный вывод должен опираться на определение действующего напряжения через количество теплоты или мощность, выделяемую в цепи**
2. **Если решение не содержит подобного вывода, а начинается с готовой формулы (через интеграл или через сумму квадратов), то баллы выставляются только за правильный ответ. Максимально возможный балл в этом случае равен 3.**
3. **Ответ, указанный без размерности, не является правильным**

7. *(15 баллов)* Хозяин, выгуливая собаку, бросил ей в качестве апорта прямую однородную палку. Она полетела, вращаясь в вертикальной плоскости. В определенный момент времени скорости концов полки оказались равны $v_A=3\sqrt{3}$ м/с и $v_B=3$ м/с. При этом

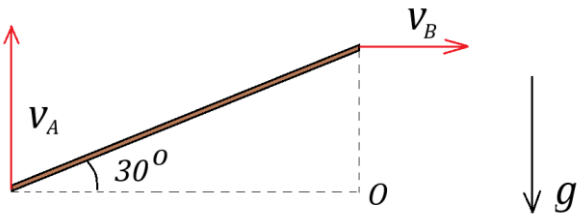
одна из них направлена строго горизонтально, а вторая – строго вертикально вверх (см. рис).



В этот момент времени палка находилась на высоте H=4 м от земли. Считать, что размер палки намного меньше высоты H. Сколько времени палке еще лететь до земли? Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

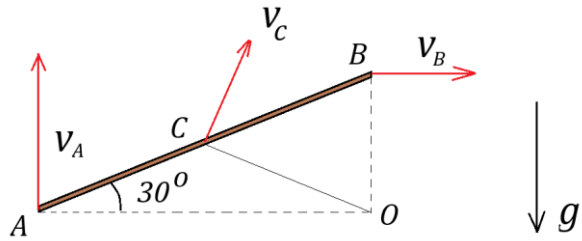
Решение:

В точке O находится мгновенная ось вращения. **(2 балла)**



Из соотношения между скоростями следует, что в данный момент времени палка расположена под углом 30^O к горизонту. **(2 балла)**

Найдем скорость центра палки:



Треугольник COB – равносторонний, CO=OB. Получаем, что:

$v_C = v_B = 3$ м/с. **(2 балла)**

При этом скорость центра палки направлена под углом 60^O к горизонту. **(2 балла)**

Уравнение движения для центра палки:

$y = H + v_C \sin 60^o \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. **(2 балла)**

$0 = 4 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t - \frac{10t^2}{2}$. **(2 балла)**

Получаем, что палке еще лететь $t \approx 1{,}19$ с. **(3 балла)**

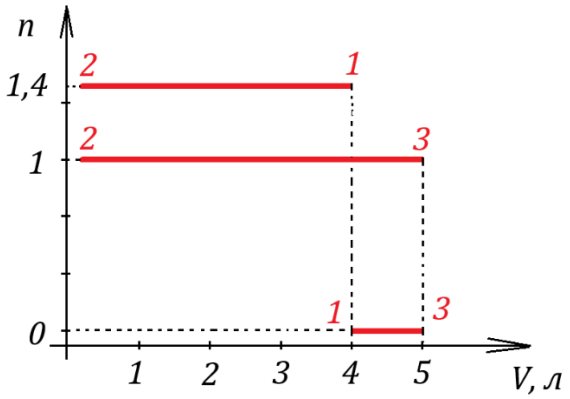
Ответ: ≈1,19 с

Примечания:

1. **Ответ без указания единиц измерения не засчитывается**
2. **Утверждение, что скорость центра масс палки можно найти как среднюю арифметическую всего двух точек (концов палки) необходимо доказывать. При отсутствии доказательства этого утверждения максимально возможный балл за задачу равен 9-ти.**

8. *(15 баллов)* Политропический процесс – процесс, при котором теплоемкость газа остается неизменной. Уравнение подобного процесса pV^n=const, где n – показатель политропы.

Один моль двухатомного газа в качестве рабочего тела тепловой машины участвует в цикле 1-2-3-1. Дан график зависимости показателя политропы n от объема, занимаемого газом. Найдите КПД цикла 1-2-3-1, если температура в точке 1 равна T_1=400 К, а тепло, подведенное в процессе 2-3, равно Q_{23}=16620 Дж. Универсальная газовая постоянная R=8,31 Дж/моль·К.



Решение:

КПД цикла:

$\eta = \frac{Q}{Q_+} = \frac{Q_{12}+Q_{23}+Q_{31}}{Q_+}$.

$n_{12} = 1{,}4 = \gamma$, показатель адиабаты для двухатомного газа, следовательно, процесс 12 адиабатный:

$Q_{12} = 0$. **(2 балла)**

$n_{23} = 1$, следовательно, процесс 23 изотермический, Q_{23} дано в условии. **(2 балла)**

$n_{31} = 0$, следовательно, процесс 31 изобарный. **(2 балла)**

$Q_{31} = p\Delta V + \Delta U = p(V_1 - V_3) + \frac{i}{2}(pV_1 - pV_3) = \frac{i+2}{2}p(V_1 - V_3)$. **(2 балла)**

$V_1 < V_3$, следовательно, $Q_{31} < 0$. Тогда $Q_+ = Q_{23}$.

Закон Менделеева-Клапейрона для газа в состоянии 1:

$pV_1 = \nu RT_1$,

отсюда $Q_{31} = \frac{i+2}{2}\nu RT_1\left(1 - \frac{V_3}{V_1}\right)$. **(2 балла)**

$\eta = \frac{Q_{23}+Q_{31}}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{31}}{Q_{23}} = 1 + \frac{i+2}{2}\frac{\nu RT_1}{Q_{23}}\left(1 - \frac{V_3}{V_1}\right)$. **(2 балла)**

Для двухатомного газа $i = 5$. **(1 балл)**

$\eta = 0{,}825 = 82{,}5\ \%$. **(2 балла)**

Ответ: 82,5%

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

10 класс **Заключительный тур** **2025-2026**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) В соревнованиях по шашкам приняли участие 3 студента первого курса и несколько студентов второго курса. Три первокурсника набрали вместе 16 очков, а каждый второкурсник набрал одинаковое число очков. Сколько второкурсников участвовало в соревновании, если каждый из участников соревнования играет с каждым из остальных по одной партии. За выигрыш даётся 1 очко, за ничью – ½ очка, за проигрыш – 0 очков. Найдите все решения.

Ответ: 13 или 26.

Решение. Пусть x – количество очков, которые набрал каждый второкурсник, y – число второкурсников. Тогда $xy + 16$ – общее количество очков во всех играх, с другой стороны общее количество очков во всех играх равно $\frac{(y+3)(y+2)}{2}$. Получаем уравнение $xy + 16 = \frac{(y+3)(y+2)}{2}$, откуда $2x = y + 5 - \frac{26}{y}$.

Из условия, что $2x$ и y натуральные числа: y =1, 2, 13, 26. При $y = 13$, $x = 8$, при $y = 26$, $x = 15$.

Критерии оценивания: Записано правильное уравнение (с полным обоснованием) – 5 баллов. Если не объясняется, почему количество партий равно количеству баллов – минус 3 балла. Если перебор делителей неполный, то минус 2 балла за потерю каждого случая. Если указывается, что общее количество очков – целое, то минус 2 балла. Ответ угадан – 2 балла. Обоснованно найдено только одно решение – 7 баллов. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

2. (*13 баллов*) Назовём «тэшкой» фигуру из четырёх клеточек в виде буквы «Т» с укороченной ножкой. Какое наибольшее количество тэшек можно выложить в прямоугольнике 6×22 без наложений и выходов за границу? Приведите пример на Ваш ответ и докажите, что больше выложить нельзя.

Ответ: 32.

Решение. *Пример*. В квадрате 4×4 легко укладываются 4 тэшки. Укладываем 5 таких квадратов вплотную друг к другу вдоль большей стороны вплотную к ней. На оставшейся территории легко уложить 12 тэшек. Получим $5 \cdot 4 + 12 = 32$ (тэшки).

Оценка. Нанесём на данный прямоугольник шахматную раскраску. Тогда каждая тэшка накроет нечётное число чёрных клеток (одну или три). Предположим, что выложено 33 тэшки (больше не может быть, так как суммарная площадь тэшек окажется больше площади прямоугольника). Тогда они вместе накроют нечётное число чёрных клеток, так как сумма нечётного количества нечётных слагаемых – нечётное число, в то время как чёрных 66 клеток. Получено противоречие, 33 тэшки выложить невозможно.

Критерии оценивания. Верная обоснованная оценка – 8 баллов, но если при построении математической модели для оценки (для шахматной раскраски доски) переменные введены неверно, или нет полного объяснения), то – 0 баллов. Пример – 5

баллов, при этом на рисунке должны быть отмечены пустые клетки и отчётливо видны тэшки. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение 13 баллов.

3. (*13 баллов*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z+t=16, \\ xy+xz+xt+yz+yt+zt=96. \end{cases}$$

Ответ: $x=y=z=t=4$.

Решение. Возведём первое уравнение в квадрат $(x+y+z+t)^2=256$ или $x^2+y^2+z^2+t^2+2\cdot 96=256$, то есть $x^2+y^2+z^2+t^2=64$.

Рассмотрим систему $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2=64, \\ xy+xz+xt+yz+yt+zt=96. \end{cases}$ Из первого уравнения, умноженного на 3, вычтем второе, умноженное на 2. Получим уравнение:

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(x-t)^2+(y-z)^2+(y-t)^2+(z-t)^2=0.$$

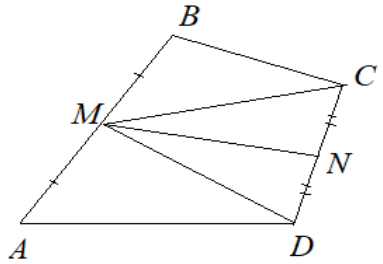
Следовательно, $x=y=z=t=4$.

Критерии оценивания: После верных преобразований получена сумма квадратов переменных – 4 балла. Если единственность не доказана – минус 9 баллов. Если при доказательстве единственности используются различные неравенства, то должно быть приведено неравенство в общем виде, затем адаптировано к условию задачи, и объяснено, откуда следует единственность решения. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение – 12 баллов.

4. (*13 баллов*) В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* даны длины сторон *AD*=4, *BC*=$\sqrt{2}$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон *AB* и *CD*, если $\angle A=62^\circ$, $\angle B=73^\circ$.

Ответ: $\frac{\sqrt{26}}{2}$.

Решение. Пусть *M* – середина отрезка *AB*, *N* – середина отрезка *CD*. Рассмотрим векторный способ решения задачи.



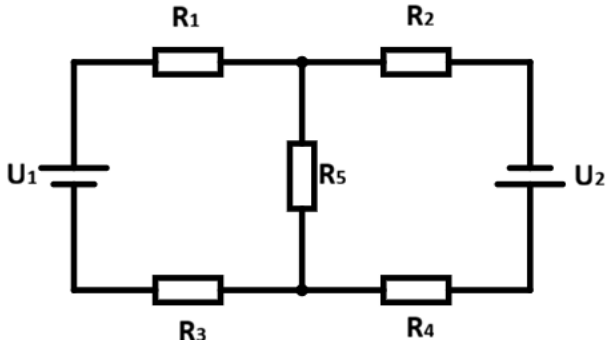
Имеем $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}$. Так как $\overrightarrow{MN}=\frac{\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}}{2}$, то $\overrightarrow{MN}=\frac{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}}{2}=\frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}}{2}$. Найдём скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{MN}$. Получаем $\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2\right)$. Используя тот факт, что угол между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равен $180^\circ-62^\circ-73^\circ=45^\circ$, получаем:

$$\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\cdot 4\cos 45^\circ+4^2\right)=\frac{1}{4}(2+8+16)=\frac{13}{2}.$$

В итоге $MN = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

Критерии оценивания. Все векторные соотношения должны быть выведены. Если используется готовая векторная формула, получен верный ответ, то максимальное количество баллов 3. Если нет обоснования нахождения угла между векторами (в некоторых вариантах решения – между прямыми), то минус 4 балла. Отсутствие чертежа при любом способе решения или при координатном способе решения отсутствие системы координат – не более 6 баллов. Если обоснованно получен правильный ответ, в котором не найдены значения тригонометрических функций, ставим 5 баллов. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение 13 баллов.

5. *(10 баллов)* Из резистров номиналами R_1=6 Ом, R_2=12 Ом, R_3=8 Ом, R_4=2 Ом, R_5=14 Ом и источников тока с напряжением U_1=10,5 В и U_2=21 В составили схему, изображенную на рисунке. Найдите токи, протекающие через источники.



Решение:

Воспользуемся методом наложения токов.

Рассмотрим токи, которые создает источник U_1. Эквивалентное сопротивление цепи для первого источника $R_{\text{экв1}} = R_1 + \frac{(R_2+R_4)R_5}{R_2+R_4+R_5} + R_3 = 21$ Ом. **(2 балла)**

Тогда ток через первый источник (общий ток) $i_1 = \frac{U_1}{R_{\text{экв1}}} = 0{,}5$ А **(1 балл)**

Ток через место, где находится второй источник, будет вполовину меньше, так как равные сопротивления соединены последовательно: $i_2 = 0{,}25$ А . **(1 балл)**

Аналогично для второго источника:

$R_{\text{экв2}} = R_4 + \frac{(R_1+R_3)R_5}{R_1+R_3+R_5} + R_2 = 21$ Ом. **(2 балла)**

Ток через второй источник $i_2' = \frac{U_2}{R_{\text{экв2}}} = 1$ А, а через первый опять вдвое меньше $i_1' = 0{,}5$ А. **(2 балла)**

Токи по направлению совпадают, поэтому искомые токи:

$I_1 = i_1 + i_1' = 1$ А, **(1 балл)**

$I_1 = i_1 + i_2' = 1{,}25$ А. **(1 балл)**

Ответ: 1 А и 1,25 А

Примечания

Возможен вариант решения через правила Кирхгофа. В этом случае обязателен рисунок с расставленными токами и применяется следующий вариант разбалловки:

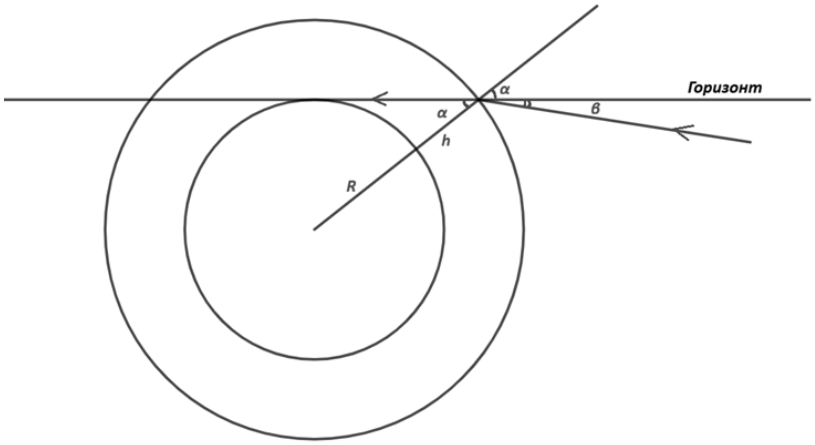
1. Правило Кирхгофа для 1 контура (3 балла)

2. Правило Кирхгофа для 2 контура (3 балла)

3. Ответы (4 балла)

6. *(10 баллов)* Однажды дядя Вова, находясь на планете Плюк радиуса R, встречал восход. Вот-вот из-за горизонта показались первые лучи звезды, вокруг которой обращается Плюк. Дядя Вова выяснил, что у этой планеты необычная атмосфера: она имеет толщину h=R, а показатель преломления в атмосфере везде одинаков и равен $n=\sqrt{3}$. Помогите дяде Вове определить, на сколько градусов ниже горизонта на самом деле была звезда во время восхода.

Решение:



Искомый угол между звездой и горизонтом β. Преломившийся луч идет вдоль горизонта под углом α к нормали.

Правильный рисунок **(4 балла)**

Тогда можно записать следующие уравнения:

$\sin\alpha = \frac{R}{R+h} = \frac{1}{2}$, тогда $\alpha = 30°$. **(2 балла)**

$n\sin\alpha = 1 * \sin(\alpha+\beta)$, где 1 – показатель преломления в вакууме. **(2 балла)**

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $\alpha+\beta = 60°$, следовательно, $\beta = 30°$. **(2 балла)**

Ответ: 30^O

7. *(15 баллов)* Два снежка одинаковой массы при нулевой температуре одновременно бросили в воздух, первый снежок бросали с балкона на высоте H_1=8 м со скоростью v_1=4 м/с под углом 60^O к горизонту, а второй снежок бросали с балкона на высоте H_2=10 м со скоростью $v_2=2\sqrt{2}$ м/с, причем второй снежок в момент броска был ровно над первым.

Через некоторое время снежки встретились и слиплись. На какой высоте произошло слипание? Какая часть снега растает при ударе об землю, если считать, что вся кинетическая энергия снега переходит в тепло? Удельная теплота плавления снега $\lambda=3{,}4\cdot10^5$ Дж/кг, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2. Удар снежков абсолютно неупругий.

Решение:

Проекции скоростей снежков на горизонтальную ось одинаковые (иначе они бы не встретились):

$v_x = v_1 \cos 60° = v_2 \cos \propto = 2$ м/с. **(2 балла)**

Получаем, что второй снежок бросили под углом $\alpha = 45^0$. **(1 балл)**

Пусть встреча произойдет через время t. Координаты снежков по вертикали:

$y = H_1 + v_1 \sin 60° t - \frac{gt^2}{2} = H_2 + v_2 \sin 45° t - \frac{gt^2}{2}$. **(2 балла)**

Отсюда следует, что время встречи:

$t = \frac{H_2 - H_1}{v_1 \sin 60° - v_2 \sin 45°} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2} \approx 1{,}37$ с. **(2 балла)**

Тогда подставляя t, найдем высоту, на которой снежки слиплись:

$y = H_1 + v_1 \sin 60° t - \frac{gt^2}{2} = \frac{12-3\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}4$ м. **(2 балла)**

Найдем скорость слипшейся массы.

ЗСИ на горизонтальную ось:

$mv_1 \cos 60° + mv_2 \cos 45° = 2mv_x'$

$v_x' = 2$ м/с. **(1 балл)**

ЗСИ на вертикальную ось:

$m(v_1 \sin 60° - gt) + m(v_2 \sin 45° t - gt) = 2mv_y'$

$v_y' = \left(-4\sqrt{3} - 4\right)$м/с. **(1 балл)**

Тогда при падении, когда снежная масса достигнет земли, потенциальная и кинетическая энергия перейдут полностью в кинетическую, а та в свою очередь в тепло.

$\frac{2m(v_x')^2}{2} + \frac{2m(v_y')^2}{2} + 2mgy = Q = \lambda * 2mn$, где n – доля растаявшего снега. **(2 балла)**

$n = \frac{(v_x')^2 + (v_y')^2 + 2gy}{2\lambda} = \frac{94+\sqrt{3}}{340000} \approx 0{,}00028$ или $0{,}028\%$. **(2 балла)**

Ответ: ≈3,4 м и ≈0,028%

8. *(15 баллов)* Кузнец нагрел обрабатываемую заготовку из железа до $t_ж$=700 ^{O}C и, после этого, быстро опустил её в центр широкой 10-литровой теплоизолированной ёмкости, до краев наполненной холодной водой. Температура холодной воды t_0=0 ^{O}C. Часть воды очень быстро испарилась, т.е. время испарения намного меньше времени установления теплового равновесия в системе. Определите конечную температуру воды в ёмкости. Масса железной заготовки $m_ж$=5 кг, плотность железа $\rho_ж$=7800 кг/м^3, плотность воды $\rho_В$=1000 кг/м^3, удельная теплоёмкость железа $c_ж$=460 Дж/(кг·К), удельная теплоёмкость воды $c_В$=4200 Дж/(кг·К), удельная теплота испарения L=2,3·10^6 Дж/кг.

Решение:

Объём заготовки:

$$V_ж = \frac{m_ж}{\rho_ж} = \frac{5}{7800} = 0{,}64 \cdot 10^{-3}\ м^3 = 0{,}64\ л. \quad \textbf{(2 балла)}$$

Т.е. такой же объем воды вылился из ёмкости и не участвовал в дальнейшем теплообмене. **(2 балла)**

Уравнение теплового баланса для испарившейся воды:

$$c_в m_и (100 - t_0) + L m_и = c_ж m_ж (t_ж - 100). \quad \textbf{(3 балла)}$$

Находим массу и объём испарившейся воды:

$$m_и = \frac{c_ж m_ж (t_ж - 100)}{c_в (100 - t_0) + L} = \frac{460 \cdot 5 \cdot 600}{4200 \cdot 100 + 2300000} \approx 0{,}51\ кг. \quad \textbf{(1 балл)}$$

$$V_и = \frac{m_и}{\rho_и} = \frac{0{,}51}{1000} = 0{,}51 \cdot 10^{-3}\ м^3 = 0{,}51\ л. \quad \textbf{(1 балл)}$$

Следовательно, в ёмкости осталось:

$V = 10 - 0{,}64 - 0{,}51 = 8{,}85$ л воды, т.е. $m = \rho_в V = 1000 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-3} = 8{,}85$ кг. **(2 балла)**

Уравнение теплового баланса для оставшейся воды:

$$c_в m t = c_ж m_ж (100 - t). \quad \textbf{(2 балла)}$$

Окончательно:

$$t = \frac{c_ж m_ж 100}{c_в m + c_ж m_ж} = \frac{460 \cdot 5 \cdot 100}{4200 \cdot 8{,}85 + 460 \cdot 5} = 5{,}83\ ℃. \quad \textbf{(2 балла)}$$

Ответ: ≈5,83 ^{O}C

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

10 класс **Заключительный тур** **2025-2026**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) В соревнованиях по шашкам приняли участие 4 студента первого курса и несколько студентов второго курса. Четыре первокурсника набрали вместе 19 очков, а каждый второкурсник набрал одинаковое число очков. По сколько очков набрал каждый второкурсник, при условии, что каждый из участников соревнования играет с каждым из остальных по одной партии. За выигрыш даётся 1 очко, за ничью – ½ очка, за проигрыш – 0 очков. Найдите все решения.

Ответ: 9 или 16.

Решение. Пусть x – количество очков, которые набрал каждый второкурсник, y – число второкурсников, тогда $xy + 19$ – общее количество очков во всех играх, с другой стороны общее число очков во всех играх равно $\frac{(y+4)(y+3)}{2}$. Получаем уравнение $xy + 19 = \frac{(y+4)(y+3)}{2}$, откуда $2x = y + 7 - \frac{26}{y}$.

Из условия, что $2x$ и y натуральные числа: y =1, 2, 13, 26. При $y = 13$, $x = 9$, при $y = 26$, $x = 16$.

Критерии оценивания: Записано правильное уравнение (с полным обоснованием) – 5 баллов. Если не объясняется, почему количество партий равно количеству баллов – минус 3 балла. Если перебор делителей неполный, то минус 2 балла за потерю каждого случая. Если указывается, что общее количество очков – целое, то минус 2 балла. Ответ угадан – 2 балла. Обоснованно найдено только одно решение – 7 баллов. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

2. (*13 баллов*) Назовём «тэшкой» фигуру из четырёх клеточек в виде буквы «Т» с укороченной ножкой. Какое наибольшее количество тэшек можно выложить в прямоугольнике 6×18 без наложений и выходов за границу? Приведите пример на Ваш ответ и докажите, что больше выложить нельзя.

Ответ: 26.

Решение. *Пример*. В квадрате 4×4 легко укладываются 4 тэшки. Укладываем 4 таких квадрата вплотную друг к другу вдоль большей стороны вплотную к ней. На оставшейся территории легко уложить 10 тэшек. Получим $4 \cdot 4 + 10 = 26$ (тэшек).

Оценка. Нанесём на данный прямоугольник шахматную раскраску. Тогда каждая тэшка накроет нечётное число чёрных клеток (одну или три). Предположим, что выложено 27 тэшек (больше не может быть, так как суммарная площадь тэшек окажется больше площади прямоугольника). Тогда они вместе накроют нечётное число черных клеток, так как сумма нечётного количества нечётных слагаемых – нечётное число, в то время как черных 54 клетки. Получено противоречие, 27 тэшек выложить невозможно.

Критерии оценивания. Верная обоснованная оценка – 8 баллов, но если при построении математической модели для оценки (для шахматной раскраски доски) переменные введены неверно, или нет полного объяснения), то – 0 баллов. Пример – 5 баллов, при этом на рисунке должны быть отмечены пустые клетки и отчётливо видны тэшки. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение 13 баллов.

3. (*12 баллов*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z+t=12, \\ xy+xz+xt+yz+yt+zt=54. \end{cases}$$

Ответ: $x=y=z=t=3$.

Решение. Возведём первое уравнение в квадрат $(x+y+z+t)^2=144$ или $x^2+y^2+z^2+t^2+2\cdot 54=144$, то есть $x^2+y^2+z^2+t^2=36$.

Рассмотрим систему $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2=36, \\ xy+xz+xt+yz+yt+zt=54. \end{cases}$ Из первого уравнения, умноженного на 3, вычтем второе, умноженное на 2.

Получим уравнение:

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(x-t)^2+(y-z)^2+(y-t)^2+(z-t)^2=0.$$

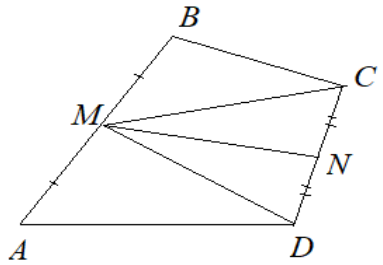
Следовательно, $x=y=z=t=3$.

Критерии оценивания: После верных преобразований получена сумма квадратов переменных – 4 балла. Если единственность не доказана – минус 9 баллов. Если при доказательстве единственности используются различные неравенства, то должно быть приведено неравенство в общем виде, затем адаптировано к условию задачи, и объяснено, откуда следует единственность решения. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение – 12 баллов.

4. (*13 баллов*) В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* даны длины сторон *AD*=3, *BC*=$\sqrt{2}$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон *AB* и *CD*, если $\angle A=64^\circ$, $\angle B=71^\circ$.

Ответ: $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Решение. Пусть *M* – середина отрезка *AB*, *N* – середина отрезка *CD*. Рассмотрим векторный способ решения задачи.



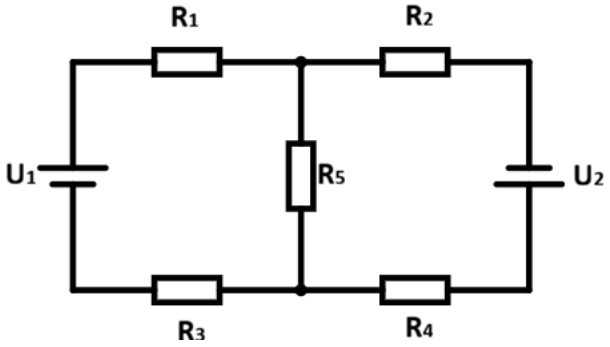
Имеем $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}$. Так как $\overrightarrow{MN}=\frac{\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}}{2}$, то $\overrightarrow{MN}=\frac{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}}{2}=\frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}}{2}$. Найдём скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{MN}$. Получаем $\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2\right)$. Используя тот факт, что угол между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равен $180^\circ-62^\circ-73^\circ=45^\circ$, получаем:

$$\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\cdot 3\cos 45^\circ+3^2\right)=\frac{1}{4}(2+6+9)=\frac{17}{4}.$$

В итоге $MN = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Критерии оценивания. Все векторные соотношения должны быть выведены. Если используется готовая векторная формула, получен верный ответ, то максимальное количество баллов 3. Если нет обоснования нахождения угла между векторами (в некоторых вариантах решения – между прямыми), то минус 4 балла. Отсутствие чертежа при любом способе решения или при координатном способе решения отсутствие системы координат – не более 6 баллов. Если обоснованно получен правильный ответ, в котором не найдены значения тригонометрических функций, ставим 5 баллов. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение 13 баллов.

5. *(10 баллов)* Из резистров номиналами R_1=12 Ом, R_2=24 Ом, R_3=16 Ом, R_4=4 Ом, R_5=28 Ом и источников тока с напряжением U_1=10,5 В и U_2=21 В составили схему, изображенную на рисунке. Найдите токи, протекающие через источники.



Решение:

Воспользуемся методом наложения токов.

Рассмотрим токи, которые создает источник U_1. Эквивалентное сопротивление цепи для первого источника $R_{экв1} = R_1 + \frac{(R_2+R_4)R_5}{R_2+R_4+R_5} + R_3 = 42$ Ом. **(2 балла)**

Тогда ток через первый источник (общий ток) $i_1 = \frac{U_1}{R_{экв1}} = 0{,}25$ А **(1 балл)**

Ток через место, где находится второй источник, будет вполовину меньше, так как равные сопротивления соединены последовательно: $i_2 = 0{,}125$ А . **(1 балл)**

Аналогично для второго источника:

$R_{экв2} = R_4 + \frac{(R_1+R_3)R_5}{R_1+R_3+R_5} + R_2 = 42$ Ом. **(2 балла)**

Ток через второй источник $i_2' = \frac{U_2}{R_{экв2}} = 0{,}5$ А, а через первый опять вдвое меньше $i_1' = 0{,}25$ А. **(2 балла)**

Токи по направлению совпадают, поэтому искомые токи:

$I_1 = i_1 + i_1' = 0{,}5$ А, **(1 балл)**

$I_1 = i_1 + i_2' = 1{,}25$ А. **(1 балл)**

Ответ: 0,5 А и 0,625 А

Примечания: возможен вариант решения через правила Кирхгофа. В этом случае обязателен рисунок с расставленными токами и применяется следующий вариант разбалловки:

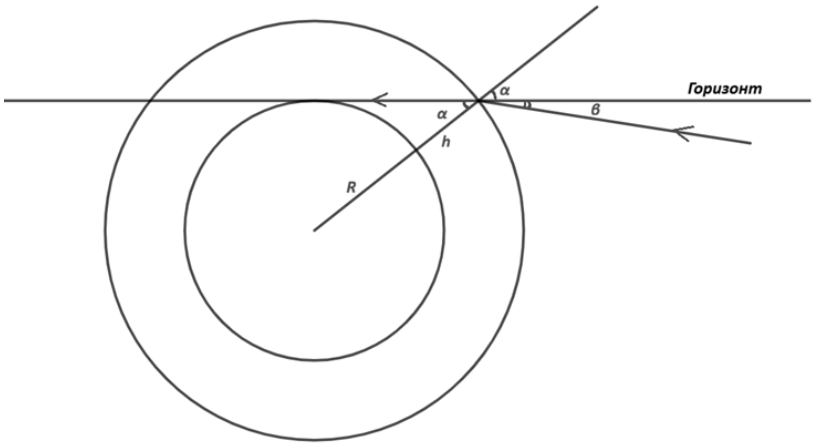
1. Правило Кирхгофа для 1 контура (3 балла)

2. Правило Кирхгофа для 2 контура (3 балла)

3. Ответы (4 балла)

6. *(10 баллов)* Однажды дядя Вова, находясь на планете Плюк радиуса R, встречал восход. Вот-вот из-за горизонта показались первые лучи звезды, вокруг которой обращается Плюк. Дядя Вова выяснил, что у этой планеты необычная атмосфера: она имеет толщину h=R, а показатель преломления в атмосфере везде одинаков и равен $n=\sqrt{2}$. Помогите дяде Вове определить, на сколько градусов ниже горизонта на самом деле была звезда во время восхода.

Решение:



Искомый угол между звездой и горизонтом β. Преломившийся луч идет вдоль горизонта под углом α к нормали.

Правильный рисунок **(4 балла)**

Тогда можно записать следующие уравнениия:

$\sin\alpha = \frac{R}{R+h} = \frac{1}{2}$, тогда $\alpha = 30°$. **(2 балла)**

$n\sin\alpha = 1 \cdot \sin(\alpha+\beta)$, где 1 – показатель преломления в вакууме. **(2 балла)**

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тогда $\alpha+\beta = 45°$, следовательно, $\beta = 15°$. **(2 балла)**

Ответ: 15^{O}

7. *(15 баллов)* Два снежка одинаковой массы при нулевой температуре одновременно бросили в воздух, первый снежок бросали с балкона на высоте H_1=8 м со скоростью v_1=4 м/с под углом 60^{O} к горизонту, а второй снежок бросали с балкона на высоте H_2=10 м со скоростью $v_2=2\sqrt{2}$ м/с, причем второй снежок в момент броска был ровно над первым.

Через некоторое время снежки встретились и слиплись. На какой высоте произошло слипание? Какая часть снега растает при ударе об землю, если считать, что вся кинетическая энергия снега переходит в тепло? Удельная теплота плавления снега $\lambda=3{,}4\cdot10^5$ Дж/кг, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2. Удар снежков абсолютно неупругий.

Решение:

Проекции скоростей снежков на горизонтальную ось одинаковые (иначе они бы не встретились):

$v_x = v_1 \cos 60° = v_2 \cos \propto = 2$ м/с. **(2 балла)**

Получаем, что второй снежок бросили под углом $\alpha = 45^0$. **(1 балл)**

Пусть встреча произойдет через время t. Координаты снежков по вертикали:

$y = H_1 + v_1 \sin 60° t - \frac{gt^2}{2} = H_2 + v_2 \sin 45° t - \frac{gt^2}{2}$. **(2 балла)**

Отсюда следует, что время встречи:

$t = \frac{H_2 - H_1}{v_1 \sin 60° - v_2 \sin 45°} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2} \approx 1{,}37$ с. **(2 балла)**

Тогда подставляя t, найдем высоту, на которой снежки слиплись:

$y = H_1 + v_1 \sin 60° t - \frac{gt^2}{2} = \frac{12-3\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}4$ м. **(2 балла)**

Найдем скорость слипшейся массы.

ЗСИ на горизонтальную ось:

$mv_1 \cos 60° + mv_2 \cos 45° = 2mv_x'$

$v_x' = 2$ м/с. **(1 балл)**

ЗСИ на вертикальную ось:

$m(v_1 \sin 60° - gt) + m(v_2 \sin 45° t - gt) = 2mv_y'$

$v_y' = \left(-4\sqrt{3} - 4\right)$м/с. **(1 балл)**

Тогда при падении, когда снежная масса достигнет земли, потенциальная и кинетическая энергия перейдут полностью в кинетическую, а та в свою очередь в тепло.

$\frac{2m(v_x')^2}{2} + \frac{2m(v_y')^2}{2} + 2mgy = Q = \lambda * 2mn$, где n – доля растаявшего снега. **(2 балла)**

$n = \frac{(v_x')^2 + (v_y')^2 + 2gy}{2\lambda} = \frac{94+\sqrt{3}}{340000} \approx 0{,}00028$ или $0{,}028\%$. **(2 балла)**

Ответ: ≈3,4 м и ≈0,028%

8. *(15 баллов)* Кузнец нагрел обрабатываемую заготовку из железа до $t_ж$=800 ^{O}C и, после этого, быстро опустил её в центр широкой 8-литровой теплоизолированной ёмкости, до краев наполненной холодной водой. Температура холодной воды t_0=0 ^{O}C. Часть воды очень быстро испарилась, т.е. время испарения намного меньше времени установления теплового равновесия в системе. Определите конечную температуру воды в ёмкости. Масса железной заготовки $m_ж$=5 кг, плотность железа $\rho_ж$=7800 кг/м^3, плотность воды $\rho_В$=1000 кг/м^3, удельная теплоёмкость железа $c_ж$=460 Дж/(кг·К), удельная теплоёмкость воды $c_В$=4200 Дж/(кг·К), удельная теплота испарения L=2,3·10^6 Дж/кг.

Решение:

Объём заготовки:

$$V_ж = \frac{m_ж}{\rho_ж} = \frac{5}{7800} = 0{,}64 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 0{,}64 \text{ л}.$$ **(2 балла)**

Т.е. такой же объем воды вылился из ёмкости и не участвовал в дальнейшем теплообмене. **(2 балла)**

Уравнение теплового баланса для испарившейся воды:

$$c_в m_и (100 - t_0) + L m_и = c_ж m_ж (t_ж - 100).$$ **(3 балла)**

Находим массу и объём испарившейся воды:

$$m_и = \frac{c_ж m_ж (t_ж - 100)}{c_в (100 - t_0) + L} = \frac{460 \cdot 5 \cdot 700}{4200 \cdot 100 + 2300000} \approx 0{,}59 \text{ кг}.$$ **(1 балл)**

$$V_и = \frac{m_и}{\rho_и} = \frac{0{,}59}{1000} = 0{,}59 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 0{,}59 \text{ л}.$$ **(1 балл)**

Следовательно, в ёмкости осталось:

$V = 8 - 0{,}64 - 0{,}59 = 6{,}77$ л воды, т.е. $m = \rho_в V = 1000 \cdot 6{,}77 \cdot 10^{-3} = 6{,}77$ кг. **(2 балла)**

Уравнение теплового баланса для оставшейся воды:

$$c_в m t = c_ж m_ж (100 - t).$$ **(2 балла)**

Окончательно:

$$t = \frac{c_ж m_ж 100}{c_в m + c_ж m_ж} = \frac{460 \cdot 5 \cdot 100}{4200 \cdot 6{,}77 + 460 \cdot 5} = 7{,}48 \text{ °C}.$$ **(2 балла)**

Ответ: ≈7,48 ^{O}C

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Известно, что $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=3$. Найдите $\frac{a^4+b^4}{a^4-b^4}+\frac{a^4-b^4}{a^4+b^4}$.

Ответ: $\frac{313}{156}$.

Решение. Из данного в условии равенства, после преобразований получаем $a^2=5b^2$ (1). Подставим a^2 в данное выражение, преобразуем и получим ответ.

Критерии оценивания. Выведено равенство (1) – 4 балла. Грубые алгебраические ошибки – 0 баллов. Ответ угадан – 2 балла. Полное обоснованное решение – 11 баллов.

2. (*12 баллов*) Даны **7** последовательных чисел. Сумма некоторых трёх из них равна **2026**, а сумма трёх других **2030**. Чему может быть равно оставшееся число, не попавшее ни в одну из этих сумм?

Ответ: 676.

Решение. Пусть даны последовательные числа:

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6.$$

Сумма всех этих чисел равна $7n+21$. А сумма некоторых шести чисел равна 2026+2030=4056. Обозначим число, не вошедшее в суммы $n+k$. Получаем уравнение $7n+21=4056+n+k$ или $6n=4035+k$. Учитывая, что k может быть только нечётным: 1, 3, 5, находим, что число кратное 6 получается только при $k=3$. При этом $n=673$, а искомое число 676. Итак, имеем числа 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679. Пример: 673+675+678=2026, 674+677+679=2030.

Критерии оценивания. Найдена сумма всех 7 чисел в общем виде – 3 балла. Обоснованно получено правильное уравнение – 6 баллов. Перебор не приведён или не полный – минус 2 балла за потерю каждого случая. Не приведён пример для сумм – минус 4 балла. Ответ угадан – 2 балла. При правильном ходе решения допущена арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Назовём «тэшкой» фигуру из четырёх клеточек в виде буквы «Т» с укороченной ножкой. Какое наибольшее количество тэшек можно выложить в прямоугольнике 6×22 без наложений и выходов за границу? Приведите пример на Ваш ответ и докажите, что больше выложить нельзя.

Ответ: 32.

Решение. *Пример*. В квадрате 4×4 легко укладываются 4 тэшки. Укладываем 5 таких квадратов вплотную друг к другу вдоль большей стороны вплотную к ней. На оставшейся территории легко уложить 12 тэшек. Получим $5\cdot4+12=32$ (тэшки).

Оценка. Нанесём на данный прямоугольник шахматную раскраску. Тогда каждая тэшка накроет нечётное число чёрных клеток (одну или три). Предположим, что выложено 33 тэшки (больше не может быть, так как суммарная площадь тэшек окажется больше площади прямоугольника). Тогда они вместе накроют нечётное число чёрных клеток, так как сумма нечётного количества нечётных слагаемых – нечётное число, в то время как чёрных 66 клеток. Получено противоречие, 33 тэшки выложить невозможно.

Критерии оценивания. Верная обоснованная оценка – 8 баллов, но если при построении математической модели для оценки (для шахматной раскраски доски) переменные введены неверно, или нет полного объяснения), то – 0 баллов. Пример – 5 баллов, при этом на рисунке должны быть отмечены пустые клетки и отчётливо видны тэшки. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение 13 баллов.

4. (*14 баллов*) В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* даны длины сторон *AD*=2, *BC*=$\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон *AB* и *CD*, если $\angle A=70^\circ$, $\angle B=80^\circ$.

Ответ. $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Решение. Пусть *M* – середина отрезка *AB*, *N* – середина отрезка *CD*. Построим $AFCD$ – параллелограмм, *E* – середина AF (см.рис.1).

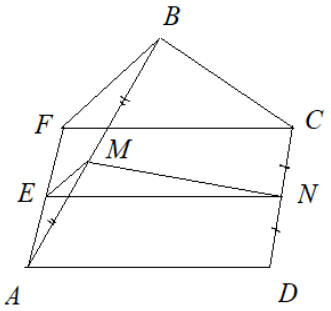


Рис.1.

Имеем $\angle BCF=180^\circ-70^\circ-80^\circ=30^\circ$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $F_1B_1C_1$ с прямым углом B_1, $\angle C=30^\circ$, и сторонами: $F_1C_1=2$, катеты $F_1B_1=1$, $B_1C_1=\sqrt{3}$.

$\Delta FBC=\Delta F_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников, следовательно, $\angle BFC=60^\circ$. Так как $\angle BFC=\angle MEN$, то в ΔEMN $\angle MEN=60^\circ$, $EM=\frac{1}{2}$. Пусть MG – высота ΔEMN (см. рис.2).

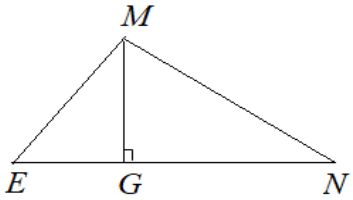
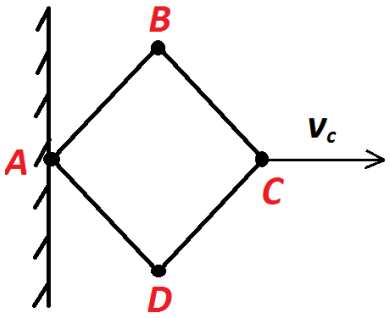


Рис.2.

Тогда $MG=ME\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $EG=\frac{1}{2}EM=\frac{1}{4}$, $GN=EN-EG=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$. По теореме Пифагора $MN=\sqrt{MG^2+GN^2}=\sqrt{\frac{3}{16}+\frac{49}{16}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Критерии оценивания. Полное решение – 14 баллов (задача может быть решена и другими способами). *Векторное решение*: Все векторные соотношения должны быть выведены. Если используется готовая векторная формула, получен верный ответ, то максимальное количество баллов 3. Если нет обоснования нахождения угла между векторами (в некоторых вариантах решения – между прямыми), то минус 4 балла. Отсутствие чертежа при любом способе решения или при координатном способе решения отсутствие системы координат – не более 6 баллов. Если обоснованно получен правильный ответ, в котором не найдены значения тригонометрических функций, ставим 5 баллов. При правильном ходе решения допущена арифметическая ошибка – минус 2 балла. Ответ угадан – 2 балла.

5. *(10 баллов)* Имеется конструкция, состоящая из четырех одинаковых стержней. Стержни друг с другом соединены шарнирами. В точке А конструкция присоединена к стенке. Известно, что в момент времени, когда угол ABC был равен 90^0, скорость точки С была направлена вправо и была равна v_C=5 см/с. Определите скорость точки В в этот момент времени.



Решение:

Расстояние между точками В и С, а также между точками А и В должно быть неизменным. **(3 балла)**

Получаем, что скорость точки В направлена в сторону точки С. **(4 балла)**

В результате: $v_c \cdot \cos 45 = 5\frac{\sqrt{2}}{2} = 3{,}54$ см/с. **(3 балла)**

Ответ: ≈3,54 см/с

6. *(10 баллов)* Цепочка массой m=500 грамм состоит из 2026 одинаковых, гладких звеньев. Её свободно подвесили за концы к потолку. Угол между потолком и цепочкой равен α=60º. Определите натяжение T цепочки в самой нижней точке. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Решение:

Горизонтальная проекция силы натяжения цепочки в любом месте одинакова. Следовательно:

$T = T_в \cos\alpha$. **(4 балла)**

где $T_в$ – натяжение цепочки в точке соприкосновения с потолком.

Кроме того:

$2T_в \sin\alpha = mg.$ **(3 балла)**

В результате получаем:

$T = \frac{mg}{2} ctg\alpha = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1{,}4$ Н. **(3 балла)**

Ответ: 1,4 Н

Примечание: если участник изображал цепочку в виде двух прямых отрезков, сходящихся в нижней точке под углом 90^O-α, то дальше любые совпадения с верным решением случайны и не оценивались.

7. *(15 баллов)* В электрической схеме (см. рис. 1) все резисторы имеют сопротивление R=2 Ом, а диоды – напряжение открытия U_0=2 В. Вольтамперная характеристика диодов приведена на рисунке 2. Схему подключают к реальному источнику тока. Его можно представить как идеальный источник соединенный последовательно с резистором r=1 Ом. Найти мощность тока во всей цепи, если напряжение идеального источника равно а) 7 В б) 5 В.

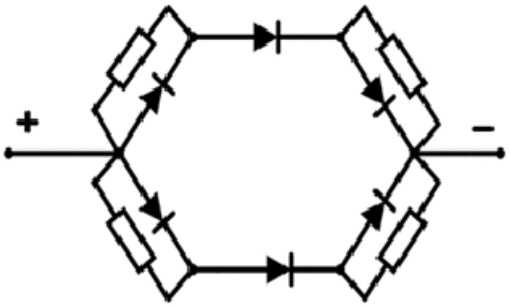


Рис. 1

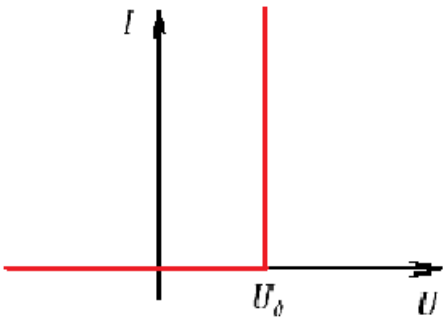


Рис. 2

Решение:

Для открытия всех диодов необходимо, чтобы напряжение источника:

$U_{ист} > 3U_0.$ **(2 балла)**

а) Все диоды открыты. Тогда на всех резисторах напряжение U_0, следовательно, мощность, выделяемая на каждом резисторе:

$P_0 = \frac{{U_0}^2}{R} = 2$ Вт. **(2 балла)**

На сопротивлении r падает напряжение:

$U_1 = U_{ист} - 3U_0 = 1$ В. **(2 балла)**

Тогда суммарная мощность:

$P = 4P_0 + \frac{{u_1}^2}{r} = 4 \cdot 2$ Вт $+ 1$ Вт $= 9$ Вт. **(2 балла)**

б) Открыты не все диоды.

Но $U_{\text{ист}} > u_0$, следовательно, есть открытые диоды, причем средние диоды всегда должны быть открыты, иначе ток через цепь не потечет. **(1 балл)**

Из симметрии через все резисторы течет одинаковый ток I. Тогда ток в цепи $2I$.

$U_{\text{ист}} = IR + U_0 + IR + 2Ir$. **(2 балла)**

Отсюда $I = \frac{U_{\text{ист}} - U_0}{2R+2r} = 0{,}5\ A$ **(2 балла)**

Суммарная мощность $P = 4I^2R + (2I)^2r = 3$ Вт. **(2 балла)**

Ответ: 9 Вт и 3 Вт

8. *(15 баллов).* В теплоизолированном сосуде ёмкостью 1 литр находятся 900 мл воды, температура которой 70 $^{\text{O}}$C. В сосуд помещают кусок тающего льда массой 252 грамма, полностью утапливая его при этом. Определите температуру содержимого сосуда после установления теплового равновесия. Время, за которое в сосуд помещается лед намного меньше времени установления теплового равновесия. Плотность льда 900 кг/м^3, плотность воды 1000 кг/м^3, удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, удельная теплоёмкость воды 4,2 кДж/кг.

Решение:

Объём, занимаемый льдом:

$V_{\text{Л}} = \frac{m_{\text{Л}}}{\rho_{\text{Л}}} = \frac{0{,}252}{900} = 0{,}00028\ \text{м}^3 = 280\ \text{мл}.$ **(3 балла)**

Следовательно, при помещении льда в сосуд выльется 180 мл воды и останется только:

$900 - 180 = 720$ мл воды. **(3 балла)**

Это $m_{\text{В}} = \rho_{\text{В}} V_{\text{В}} = 1000 \cdot 0{,}000720 = 0{,}72$ кг. **(3 балла)**

Уравнение теплового баланса:

$\lambda m_{\text{Л}} + c m_{\text{Л}}(t - 0) = c m_{\text{В}}(70 - t)$. **(3 балла)**

Получаем, что температура содержимого:

$t = 31{,}5$ ℃. **(3 балла)**

Ответ: 31,5 $^{\text{O}}$C

Вариант 2
Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Известно, что $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=5$. Найдите $\frac{a^4+b^4}{a^4-b^4}+\frac{a^4-b^4}{a^4+b^4}$.

Ответ: $\frac{1241}{580}$.

Решение. Из данного в условии равенства, после преобразований получаем $a^2=\frac{7}{3}b^2$ (1). Подставим a^2 в данное выражение, преобразуем и получим ответ.

Критерии оценивания. Выведено равенство (1) – 4 балла. Грубые алгебраические ошибки – 0 баллов. Ответ угадан – 2 балла. Полное обоснованное решение – 11 баллов.

2. (*12 баллов*) Даны **7** последовательных чисел. Сумма некоторых трёх из них равна **2026**, а сумма трёх других **2032**. Чему может быть равно оставшееся число, не попавшее ни в одну из этих сумм?

Ответ: 674.

Решение. Пусть даны последовательные числа:

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6.$$

Сумма всех этих чисел равна $7n+21$. А сумма некоторых шести чисел равна 2026+2032=4058. Обозначим число, не вошедшее в суммы $n+k$. Получаем уравнение $7n+21=4058+n+k$ или $6n=4037+k$. Учитывая, что k может быть только нечётным: 1, 3, 5, находим, что число кратное 6 получается только при $k=1$. При этом $n=673$, а искомое число 674. Итак, имеем числа 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679. Пример: 673+675+678=2026, 676+677+679=2032.

Критерии оценивания. Найдена сумма всех 7 чисел в общем виде – 3 балла. Обоснованно получено правильное уравнение – 6 баллов. Перебор не приведён или не полный – минус 2 балла за потерю каждого случая. Не приведён пример для сумм – минус 4 балла. Ответ угадан – 2 балла. При правильном ходе решения допущена арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Назовём «тэшкой» фигуру из четырёх клеточек в виде буквы «Т» с укороченной ножкой. Какое наибольшее количество тэшек можно выложить в прямоугольнике 6×18 без наложений и выходов за границу? Приведите пример на Ваш ответ и докажите, что больше выложить нельзя.

Ответ: 26.

Решение. *Пример*. В квадрате 4×4 легко укладываются 4 тэшки. Укладываем 4 таких квадрата вплотную друг к другу вдоль большей стороны вплотную к ней. На оставшейся территории легко уложить 10 тэшек. Получим $4\cdot4+10=26$ (тэшек).

Оценка. Нанесём на данный прямоугольник шахматную раскраску. Тогда каждая тэшка накроет нечётное число чёрных клеток (одну или три). Предположим, что выложено 27 тэшек (больше не может быть, так как суммарная площадь тэшек окажется больше площади прямоугольника). Тогда они вместе накроют нечётное число черных клеток, так как сумма нечётного количества нечётных слагаемых – нечётное число, в то время как черных 54 клетки. Получено противоречие, 27 тэшек выложить невозможно.

Критерии оценивания. Верная обоснованная оценка – 8 баллов, но если при построении математической модели для оценки (для шахматной раскраски доски) переменные введены неверно, или нет полного объяснения), то – 0 баллов. Пример – 5 баллов, при этом на рисунке должны быть отмечены пустые клетки и отчётливо видны тэшки. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение 13 баллов.

4. (*14 баллов*) В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* даны длины сторон *AD*=4, *BC*=$2\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон *AB* и *CD*, если $\angle A=70^\circ$, $\angle B=80^\circ$.

Ответ. $\sqrt{13}$.

Решение. Пусть *M* – середина отрезка *AB*, *N* – середина отрезка *CD*. Построим $AFCD$ – параллелограмм, *E* – середина AF (см.рис.1).

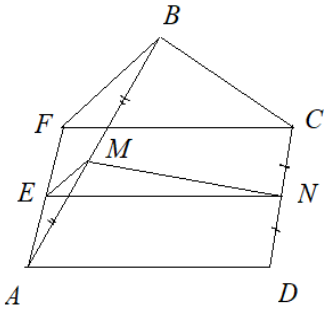


Рис.1.

Имеем $\angle BCF=180^\circ-70^\circ-80^\circ=30^\circ$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $F_1B_1C_1$ с прямым углом B_1, $\angle C=30^\circ$, и сторонами: $F_1C_1=4$, катеты $F_1B_1=2$, $B_1C_1=2\sqrt{3}$.

$\Delta FBC=\Delta F_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников, следовательно, $\angle BFC=60^\circ$. Так как $\angle BFC=\angle MEN$, то в ΔEMN $\angle MEN=60^\circ$, $EM=1$. Пусть MG – высота ΔEMN (см. рис.2).

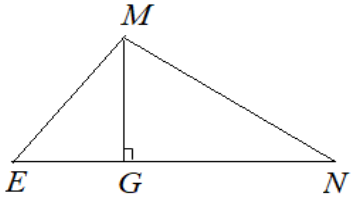
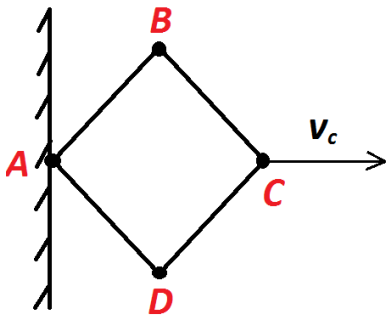


Рис.2.

Тогда $MG=ME\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $EG=\frac{1}{2}EM=\frac{1}{2}$, $GN=EN-EG=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$. По теореме Пифагора $MN=\sqrt{MG^2+GN^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{49}{4}}=\sqrt{13}$.

Критерии оценивания. Полное решение – 14 баллов (задача может быть решена и другими способами). *Векторное решение*: Все векторные соотношения должны быть выведены. Если используется готовая векторная формула, получен верный ответ, то максимальное количество баллов 3. Если нет обоснования нахождения угла между векторами (в некоторых вариантах решения – между прямыми), то минус 4 балла. Отсутствие чертежа при любом способе решения или при координатном способе решения отсутствие системы координат – не более 6 баллов. Если обоснованно получен правильный ответ, в котором не найдены значения тригонометрических функций, ставим 5 баллов. При правильном ходе решения допущена арифметическая ошибка – минус 2 балла. Ответ угадан – 2 балла.

5. *(10 баллов)* Имеется конструкция, состоящая из четырех одинаковых стержней. Стержни друг с другом соединены шарнирами. В точке A конструкция присоединена к стенке. Известно, что в момент времени, когда угол ABC был равен 90^0, скорость точки C была направлена вправо и была равна v_C=4 см/с. Определите скорость точки D в этот момент времени.



Решение:

Расстояние между точками D и C, а также между точками A и D должно быть неизменным. **(3 балла)**

Получаем, что скорость точки D направлена в сторону точки C. **(4 балла)**

В результате: $v_c \cdot \cos 45 = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}83$ см/с. **(3 балла)**

Ответ: ≈2,83 см/с

6. *(10 баллов)* Цепочка массой m=400 грамм состоит из 2026 одинаковых, гладких звеньев. Её свободно подвесили за концы к потолку. Угол между потолком и цепочкой равен α=45°. Определите натяжение T цепочки в самой нижней точке. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Решение:

Горизонтальная проекция силы натяжения цепочки в любом месте одинакова. Следовательно:

$T = T_в \cos\alpha$. **(4 балла)**

где $T_в$ – натяжение цепочки в точке соприкосновения с потолком.

Кроме того:

$2T_{\text{в}} \sin\alpha = mg.$ **(3 балла)**

В результате получаем:

$T = \frac{mg}{2} ctg\alpha = \frac{4}{2} \cdot 1 = 2$ Н. **(3 балла)**

Ответ: 2 Н

Примечание: если участник изображал цепочку в виде двух прямых отрезков, сходящихся в нижней точке под углом 90^{O}-α, то дальше любые совпадения с верным решением случайны и не оценивались.

7. *(15 баллов)* В электрической схеме (см. рис. 1) все резисторы имеют сопротивление R=4 Ом, а диоды – напряжение открытия U_0=3 В. Вольтамперная характеристика диодов приведена на рисунке 2. Схему подключают к реальному источнику тока. Его можно представить как идеальный источник соединенный последовательно с резистором r=1 Ом. Найти мощность тока во всей цепи, если напряжение идеального источника равно а) 10 В б) 7 В.

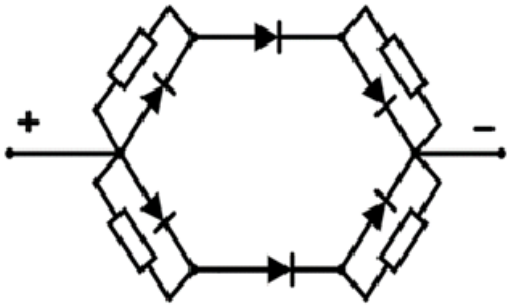


Рис. 1

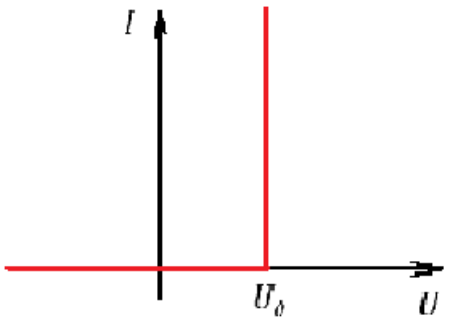


Рис. 2

Решение:

Для открытия всех диодов необходимо, чтобы напряжение источника:

$U_{\text{ист}} > 3U_0.$ **(2 балла)**

а) Все диоды открыты. Тогда на всех резисторах напряжение U_0, следовательно, мощность, выделяемая на каждом резисторе:

$P_0 = \frac{{U_0}^2}{R} = 2{,}25$ Вт. **(2 балла)**

На сопротивлении r падает напряжение:

$U_1 = U_{\text{ист}} - 3U_0 = 1$ В. **(2 балла)**

Тогда суммарная мощность:

$P = 4P_0 + \frac{{u_1}^2}{r} = 4 \cdot 2{,}25$ Вт $+ 1$ Вт $= 10$ Вт. **(2 балла)**

б) Открыты не все диоды.

Но $U_{\text{ист}} > u_0$, следовательно, есть открытые диоды, причем средние диоды всегда должны быть открыты, иначе ток через цепь не потечет. **(1 балл)**

Из симметрии через все резисторы течет одинаковый ток I. Тогда ток в цепи $2I$.

$U_{\text{ист}} = IR + U_0 + IR + 2Ir$. **(2 балла)**

Отсюда $I = \frac{U_{\text{ист}} - U_0}{2R+2r} = 0{,}4\ A$ **(2 балла)**

Суммарная мощность $P = 4I^2R + (2I)^2r = 3{,}2$ Вт. **(2 балла)**

Ответ: 10 Вт и 3,2 Вт

8. *(15 баллов)* В теплоизолированном сосуде ёмкостью 1 литр находятся 900 мл воды, температура которой 80 $^{\text{O}}$C. В сосуд помещают кусок тающего льда массой 324 грамма, полностью утапливая его при этом. Определите температуру содержимого сосуда после установления теплового равновесия. Время, за которое в сосуд помещается лед намного меньше времени установления теплового равновесия. Плотность льда 900 кг/м^3, плотность воды 1000 кг/м^3, удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, удельная теплоёмкость воды 4,2 кДж/кг.

Решение:

Объём, занимаемый льдом:

$V_{\text{Л}} = \frac{m_{\text{Л}}}{\rho_{\text{Л}}} = \frac{0{,}324}{900} = 0{,}00036\ \text{м}^3 = 360$ мл. **(3 балла)**

Следовательно, при помещении льда в сосуд выльется 260 мл воды и останется только:

$900 - 260 = 640$ мл воды. **(3 балла)**

Это $m_{\text{В}} = \rho_{\text{В}} V_{\text{В}} = 1000 \cdot 0{,}000640 = 0{,}64$ кг. **(3 балла)**

Уравнение теплового баланса:

$\lambda m_{\text{Л}} + cm_{\text{Л}}(t - 0) = cm_{\text{В}}(80 - t)$. **(3 балла)**

Получаем, что температура содержимого:

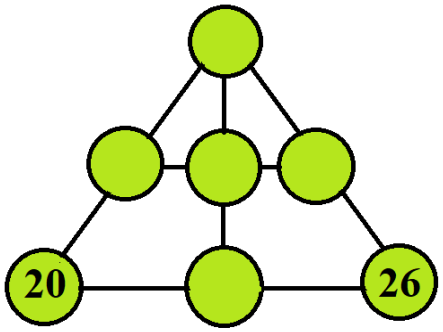
$t = 26{,}7$ °C. **(3 балла)**

Ответ: 26,7 $^{\text{O}}$C

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

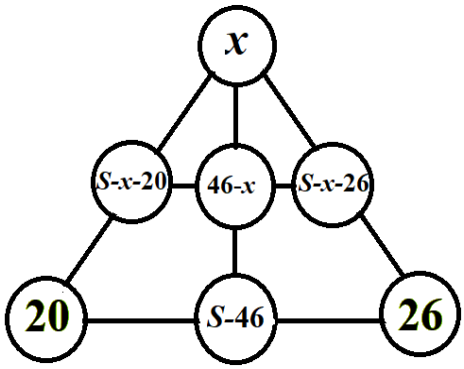
1. (*12 баллов*) В треугольнике расположены семь кругов, в двух из них записаны данные числа (см. рис.).



Расставьте в свободных кругах натуральные числа так, чтобы сумма чисел по каждой прямой, содержащей три круга, была одна и та же. Найдите количество возможных расстановок.

Ответ: 30.

Решение. Пусть сумма чисел на каждой прямой равна S, а число в круге на вершине треугольника – x. Тогда получаем расстановку (см. рис):



Сумма по средней прямой равна S, получаем уравнение:

$$S - x - 20 + 46 - x + S - x - 26 = S.$$

И тогда $S = 3x$. Найдём, сколько существует возможных вариантов расстановок натуральных чисел. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ 2x - 20 \geq 1, \\ 46 - x \geq 1, \\ 2x - 26 \geq 1, \\ 3x - 46 \geq 1. \end{cases}$$

Система равносильна системе $\begin{cases} x \geq 15\frac{2}{3}, \\ x \leq 45. \end{cases}$ Тогда возможные значения для x: 16, 17, …, 45. То есть всего 30 возможных вариантов.

Критерии оценивания. Ответ угадан, ставим 2 балла. Приведён правильный пример – 3 баллов. Если правильно найдены несколько (не все) значения x, то 6 баллов. При правильном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное решение 12 баллов.

2. (*12 баллов*) Даны **7** последовательных чисел. Сумма некоторых трёх из них равна **2026**, а сумма трёх других **2030**. Чему может быть равно оставшееся число, не попавшее ни в одну из этих сумм?

Ответ: 676.

Решение. Пусть даны последовательные числа:

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6.$$

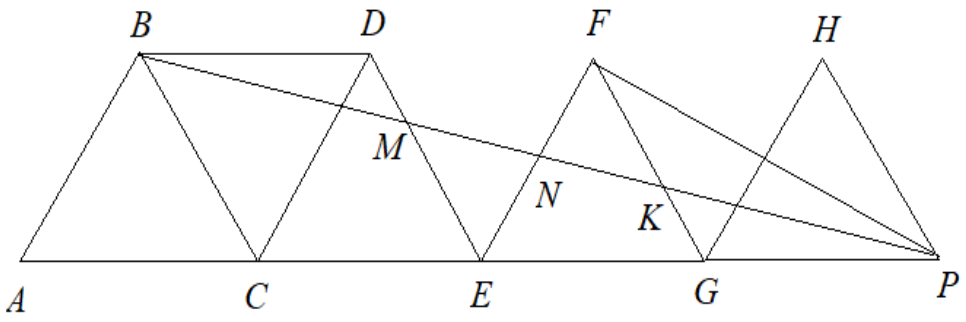
Сумма всех этих чисел равна $7n+21$. А сумма некоторых шести чисел равна 2026+2030=4056. Обозначим число, не вошедшее в суммы $n+k$. Получаем уравнение $7n+21 = 4056 + n + k$ или $6n = 4035 + k$. Учитывая, что k может быть только нечётным: 1, 3, 5, находим, что число кратное 6 получается только при $k = 3$. При этом $n = 673$, а искомое число 676. Итак, имеем числа 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679. Пример: 673+675+678=2026, 674+677+679=2030.

Критерии оценивания. Найдена сумма всех 7 чисел в общем виде – 3 балла. При правильном ходе решения допущена арифметическая ошибка – минус 2 балла. Не приведён пример для сумм – минус 4 балла. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Основания правильных равных треугольников *ABC*, *CDE*, *EFG* и *GHP* лежат на одной прямой *AP*. Площадь каждого треугольника равна 90. Прямая *BP* пересекает отрезки *DE* и *EF* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите площадь треугольника *EMN*.

Ответ: 30.

Решение. Пусть *K* – точка пересечения прямой *BP* и отрезка *FG*.



Заметим, что $\Delta BDM = \Delta PGK$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Тогда $\Delta EMN = \Delta FKN$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Отсюда получаем, что $FN = NE$, то есть PN – медиана ΔEFP. Но FG также медиана этого треугольника, а значит K – точка пересечения медиан этого треугольника и, следовательно, $FK = \frac{2}{3}FG$.

Тогда $S_{\Delta FKN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot S_{\Delta EFG} = \frac{1}{3} \cdot 90 = 30$.

Критерии оценивания. Нарисована верная конфигурация – 1 балл. Показано равенство $\Delta BDM = \Delta PGK$ или $\Delta BFN = \Delta PEN$ – 4 балла. Установлено равенство треугольников ΔEMN и ΔFKN – это оценивается ещё в 5 баллов. Имеется арифметическая ошибка при правильном ходе решения – минус 2 балла. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Два марсианина тогда и только тогда друзья, когда у них в имени есть хотя бы одна общая буква (имя – последовательность букв). Оказалось, что в некоторой компании из пяти марсиан у первого марсианина с именем ***abdef*** 14 друзей, у второго с именем ***ade*** 10 друзей, у третьего с именем ***abf*** 8 друзей, у четвертого с именем ***bcd*** 11 друзей. Сколько друзей у пятого марсианина с именем ***abcd*** ?

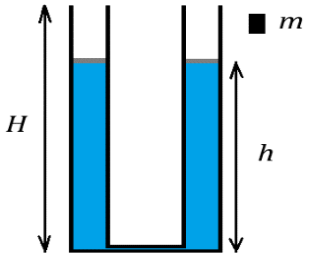
Ответ: 11.

Решение. Из условия видно, что любые 2 из пяти указанных марсиан друзья, то есть внутри компании у каждого по 4 друга. Поэтому у первого марсианина внешних друзей (за пределами компании) 10=14–4, у второго 6 внешних друзей, у третьего 4 внешних друга. Из букв в именах видно, что любой внешний друг первого является другом второго или третьего (или обоих), поэтому вместе у второго и третьего друзей не меньше, чем у первого. Значит, у второго и третьего нет общих внешних друзей (если бы их было x, то вместе их было бы $4+6-x=10-x$, и в то же время их больше или равно 10). Но любой марсианин с буквой ***a*** в имени является их общим другом. Поэтому за пределами компании нет никого с буквой ***a*** в имени. Это означает, что внешних друзей у четвёртого и пятого марсиан одинаково. Поэтому всех друзей у них одинаково.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Замечено, что множества внешних друзей у второго и третьего марсианина на пересекаются, или что вместе совпадают с множеством внешних друзей у первого марсианина, 6 баллов. Показано, что за пределами компании нет никого с буквой ***a*** в имени, 10 баллов.

Внимание! В задачах 5-8 оценивается именно решение (рассуждения, формулы, понятная логика)! Просто правильный ответ без вывода не оценивается!

5. (*10 баллов*) Два одинаковых сообщающихся сосуда высотой H и площадью поперечного сечения S каждый соединены тонкой трубкой. В сосудах под лёгкими гладкими поршнями находится жидкость плотностью ρ, так что её высота в каждом из сосудов равна h. На правый поршень кладут груз массой m. Какой будет разница между уровнями жидкости после этого? Ускорение свободного падения g. Объёмом трубки по сравнению с объёмами сосудов пренебречь.



Ответ: $\Delta h = H$, если $\frac{mg}{S} \geq \rho g H$, $\Delta h = \frac{mg}{\rho g S}$, если $\frac{mg}{S} < \rho g H$.

Решение. Возможны две ситуации. Первая, если $\frac{mg}{S} \geq \rho g H$, **(3 балла)**

то поршень с грузом опустится на дно правого сосуда, и разница между уровнями $\Delta h = H$. **(3 балла)**

Вторая, если $\frac{mg}{S} < \rho g H$, **(2 балла)**

то разница между уровнями $\Delta h = \frac{mg}{\rho g S}$. **(2 балла)**

6. (*10 баллов*) В распоряжении ребенка было много одинаковых однородных кубиков с длиной ребра *a* (рис. 1).

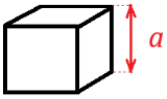


Рис. 1

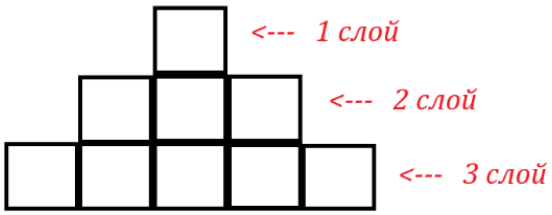


Рис. 2

Из этих кубиков он склеил пирамиду, состоящую из трех слоев, в которых кубики плотно прилегают друг к другу. Каждый слой имеет форму квадрата. Вид сбоку на пирамиду приведён на рисунке 2. Запустив пирамиду в воду, ребенок заметил, что она плавает. При этом под водой оказался ровно один третий слой. Определите плотность материала, из которого сделаны кубики. Плотность воды 1000 кг/м^3. Где проходила бы граница между водой и воздухом, если бы плотность кубиков была бы в 2 раза больше?

Ответ: ≈714 кг/м^3, пирамида утонет.

Решение. В первом слое 1 кубик. **(1 балл)**

Во втором слое 9 кубиков. **(2 балла)**

В третьем слое 25 кубиков. **(2 балла)**

Из условия плавания тел $F_A = mg$ следует, что:

$$\frac{\rho_{\text{кубика}}}{\rho_{\text{воды}}} = \frac{\text{количество кубиков под водой}}{\text{общее количество кубиков}} = \frac{25}{35}.$$ **(2 балла)**

Получаем, что плотность материала, из которого сделаны кубики:

$\rho_{\text{кубика}} = \frac{25}{35} \cdot \rho_{\text{воды}} = \frac{25}{35} \cdot 1000 \approx 714\ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$. **(1 балл)**

Если плотность кубиков будет в два раза больше, то $\rho_{\text{кубика}} > \rho_{\text{воды}}$. **(1 балл)**

Пирамида утонет. **(1 балл)**

7. *(15 баллов)* Некий ученый Кирилл исследовал свойства прямого цилиндрического стержня, составленного из двух одинаковых по объему половинок. Плотность и удельная теплоёмкость материала одной половинки ρ_1=2000 кг/м^3 и c_1=600 Дж/кг·^{O}C, а другой – ρ_2=3000 кг/м^3 и c_2=900 Дж/кг·^{O}C. Кирилл поставил стержень на более плотное основание и равномерно нагрел призму по высоте, так что нижняя часть имела температуру t_1=30 ^{O}C, а верхняя часть - t_2=60 ^{O}C. Какой будет температура стержня после завершения теплообмена? Потерями тепла пренебречь.

Решение:

Нижняя половинка тяжелее верхней в 1,5 раза. **(3 балла)**

Температура в месте соединения половинок $t = 45$ ℃. **(3 балла)**

Если бы между половинками не было теплообмена, то температура верхней стала бы:

$t_{\text{в}} = \frac{t_2 + t}{2} = 52{,}5$ ℃, **(2 балла)**

а нижней:

$t_{\text{н}} = \frac{t_1 + t}{2} = 37{,}5$ ℃. **(2 балла)**

При наличии теплообмена между половинками:

$c_1\rho_1(52{,}5 - T) = c_2\rho_2(T - 37{,}5)$. **(2 балла)**

Получаем: $T \approx 42$ ℃. **(3 балла)**

Ответ: ≈42 ^{O}C

8. *(15 баллов)* Самолет вылетел из Новосибирска 6 января в 7:00 и прилетел в Москву также 6 января в 7:25. В обратном направлении он вылетел 7 января в 19:50 и прилетел в Новосибирск 8 января в 4:15. Определите разницу часовых поясов Москвы и Новосибирска и время полёта в одну сторону.

Решение:

Получаем системы из двух уравнений:

7 часов 25 минут – 7 часов 00 минут = 25 минут = $t_{\text{полета}} - \Delta_{\text{часовых поясов}}$ **(3 балла)**

4 часа 15 минут (8 января) – 19 часов 50 минут (7 января) = 8 часов 25 минут = $t_{\text{полета}} + \Delta_{\text{часовых поясов}}$. **(3 балла)**

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$2\Delta_{\text{часовых поясов}} = 8$ часов.

Разница часовых поясов:

$\Delta_{\text{часовых поясов}} = 4$ часа. **(5 баллов)**

Время полёта: $t_{\text{полета}} = 8$ часов 25 минут $- \Delta_{\text{часовых поясов}} = 4$ часа 25 минут.

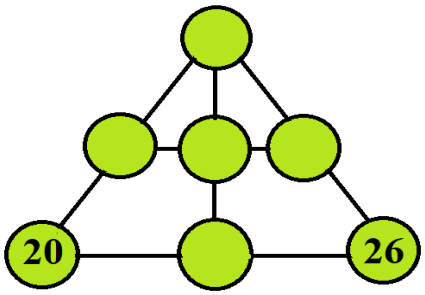
(4 балла)

Ответ: 4 часа и 4 часа 25 минут.

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

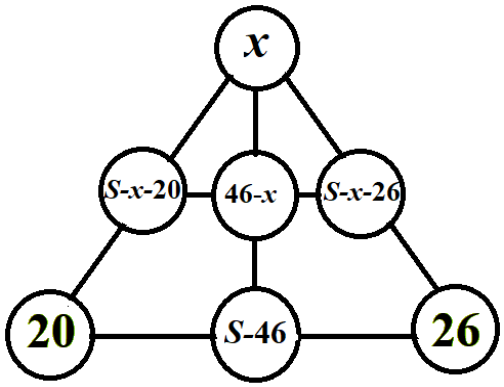
1. (*12 баллов*) В треугольнике расположены семь кругов, в двух из них записаны данные числа (см. рис.).



Расставьте в свободных кругах натуральные числа так, чтобы сумма чисел по каждой прямой, содержащей три круга, была одна и та же. Найдите наибольшее возможное значение такой суммы.

Ответ: 135.

Решение. Пусть сумма чисел на каждой прямой равна S, а число в круге на вершине треугольника – x. Тогда получаем расстановку (см. рис):



Сумма по средней прямой равна S, получаем уравнение:

$$S - x - 20 + 46 - x + S - x - 26 = S.$$

И тогда $S = 3x$. Найдём, сколько существует возможных вариантов расстановок натуральных чисел. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ 2x - 20 \geq 1, \\ 46 - x \geq 1, \\ 2x - 26 \geq 1, \\ 3x - 46 \geq 1. \end{cases}$$

Система равносильна системе $\begin{cases} x \geq 15\frac{2}{3}, \\ x \leq 45. \end{cases}$ Тогда возможные значения для x: 16, 17, …, 45. То есть при x=45 получаем наибольшее значение суммы: S=135.

Критерии оценивания. Ответ угадан, ставим 2 балла. Приведён правильный пример – 3 баллов. Если правильно найдены несколько (не все) значения x, то 6 баллов. При правильном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное решение 12 баллов.

2. (*12 баллов*) Даны **7** последовательных чисел. Сумма некоторых трёх из них равна **2026**, а сумма трёх других **2032**. Чему может быть равно оставшееся число, не попавшее ни в одну из этих сумм?

Ответ: 674.

Решение. Пусть даны последовательные числа:

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6.$$

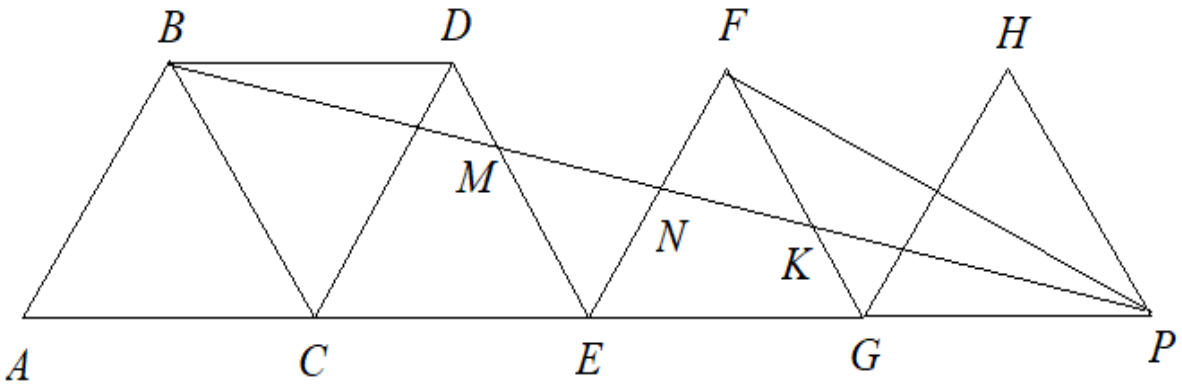
Сумма всех этих чисел равна $7n+21$. А сумма некоторых шести чисел равна 2026+2032=4058. Обозначим число, не вошедшее в суммы $n+k$. Получаем уравнение $7n+21 = 4058 + n + k$ или $6n = 4037 + k$. Учитывая, что k может быть только нечётным: 1, 3, 5, находим, что число кратное 6 получается только при $k = 1$. При этом $n = 673$, а искомое число 674. Итак, имеем числа 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679. Пример: 673+675+678=2026, 676+677+679=2032.

Критерии оценивания. Найдена сумма всех 7 чисел в общем виде – 3 балла. При правильном ходе решения допущена арифметическая ошибка – минус 2 балла. Не приведён пример для сумм – минус 4 балла. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Основания правильных равных треугольников *ABC*, *CDE*, *EFG* и *GHP* лежат на одной прямой *AP*. Площадь каждого треугольника равна 60. Прямая *BP* пересекает отрезки *DE* и *EF* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите площадь треугольника *EMN*.

Ответ: 20.

Решение. Пусть *K* – точка пересечения прямой *BP* и отрезка *FG*.



Заметим, что $\Delta BDM = \Delta PGK$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Тогда $\Delta EMN = \Delta FKN$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Отсюда получаем, что $FN = NE$, то есть PN – медиана ΔEFP. Но FG также медиана этого треугольника, а значит K – точка пересечения медиан этого треугольника и, следовательно, $FK = \frac{2}{3}FG$.

Тогда $S_{\Delta FKN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot S_{\Delta EFG} = \frac{1}{3} \cdot 60 = 20$.

Критерии оценивания. Нарисована верная конфигурация – 1 балл. Показано равенство $\Delta BDM = \Delta PGK$ или $\Delta BFN = \Delta PEN$ – 4 балла. Установлено равенство треугольников ΔEMN и ΔFKN – это оценивается ещё в 5 баллов. Имеется арифметическая ошибка при правильном ходе решения – минус 2 балла. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Два марсианина тогда и только тогда друзья, когда у них в имени есть хотя бы одна общая буква (имя – последовательность букв). Оказалось, что в некоторой компании из пяти марсиан у первого марсианина с именем ***abdef*** 16 друзей, у второго с именем ***ade*** 11 друзей, у третьего с именем ***abf*** 9 друзей, у четвертого с именем ***bcd*** 10 друзей. Сколько друзей у пятого марсианина с именем ***abcd*** ?

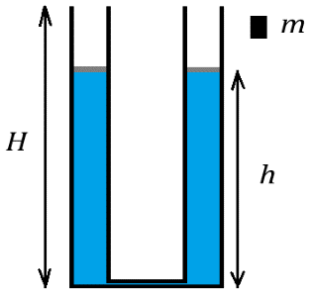
Ответ: 10.

Решение. Из условия видно, что любые 2 из пяти указанных марсиан друзья, то есть внутри компании у каждого по 4 друга. Поэтому у первого марсианина внешних друзей (за пределами компании) 12= 16–4, у второго 7 внешних друзей, у третьего 5 внешних друзей. Из букв в именах видно, что любой внешний друг первого является другом второго или третьего (или обоих), поэтому вместе у второго и третьего друзей не меньше, чем у первого. Значит, у второго и третьего нет общих внешних друзей (если бы их было x, то вместе их было бы $7+5-x = 12-x$, и в то же время их больше или равно 12). Но любой марсианин с буквой ***a*** в имени является их общим другом. Поэтому за пределами компании нет никого с буквой ***a*** в имени. Это означает, что внешних друзей у четвёртого и пятого марсиан одинаково. Поэтому всех друзей у них одинаково.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Замечено, что множества внешних друзей у второго и третьего марсианина на пересекаются, или что вместе совпадают с множеством внешних друзей у первого марсианина, 6 баллов. Показано, что за пределами компании нет никого с буквой ***a*** в имени, 10 баллов.

Внимание! В задачах 5-8 оценивается именно решение (рассуждения, формулы, понятная логика)! Просто правильный ответ без вывода не оценивается!

5. (*10 баллов*) Два одинаковых сообщающихся сосуда высотой H и площадью поперечного сечения S каждый соединены тонкой трубкой. В сосудах под лёгкими гладкими поршнями находится жидкость плотностью ρ, так что её высота в каждом из сосудов равна h. На правый поршень кладут груз массой m. Какой будет разница между уровнями жидкости после этого? Ускорение свободного падения g. Объёмом трубки по сравнению с объёмами сосудов пренебречь.



Ответ: $\Delta h = H$, если $\frac{mg}{S} \geq \rho g H$, $\Delta h = \frac{mg}{\rho g S}$, если $\frac{mg}{S} < \rho g H$.

Решение.

Возможны две ситуации.

Первая, если $\frac{mg}{S} \geq \rho g H$, **(3 балла)**

то поршень с грузом опустится на дно правого сосуда, и разница между уровнями $\Delta h = H$. **(3 балла)**

Вторая, если $\frac{mg}{S} < \rho g H$, **(2 балла)**

то разница между уровнями $\Delta h = \frac{mg}{\rho g S}$. **(2 балла)**

6. (*10 баллов*) В распоряжении ребёнка было много одинаковых однородных кубиков с длиной ребра *a* (рис. 1).

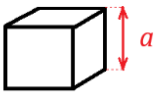


Рис. 1

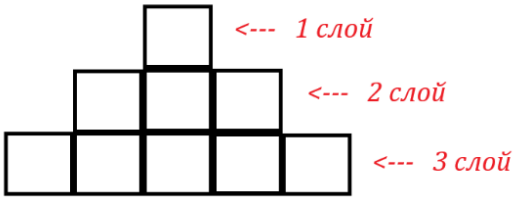


Рис. 2

Из этих кубиков он склеил пирамиду, состоящую из трёх слоев, в которых кубики плотно прилегают друг к другу. Каждый слой имеет форму квадрата. Вид сбоку на пирамиду приведён на рисунке 2. Запустив пирамиду в воду, ребенок заметил, что она плавает. При этом уровень воды проходил ровно посередине второго слоя. Определите плотность материала, из которого сделаны кубики. Плотность воды 1000 кг/м^3. Где проходила бы граница между водой и воздухом, если бы плотность кубиков была бы в 1,5 раза больше?

Ответ: ≈843 кг/м^3, пирамида утонет.

Решение.

В первом слое 1 кубик. **(1 балл)**

Во втором слое 9 кубиков. **(2 балла)**

В третьем слое 25 кубиков. **(2 балла)**

Из условия плавания тел $F_A = mg$ следует, что:

$\frac{\rho_{\text{кубика}}}{\rho_{\text{воды}}} = \frac{\text{количество кубиков под водой}}{\text{общее количество кубиков}} = \frac{29,5}{35}$. **(2 балла)**

Получаем, что плотность материала, из которого сделаны кубики:

$\rho_{\text{кубика}} = \frac{29,5}{35} \cdot \rho_{\text{воды}} = \frac{29,5}{35} \cdot 1000 \approx 843\ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$. **(1 балл)**

Если плотность кубиков будет в 1,5 раза больше, то $\rho_{\text{кубика}} > \rho_{\text{воды}}$. **(1 балл)**

Пирамида утонет. **(1 балл)**

7. (*15 баллов*) Некий учёный Кирилл исследовал свойства прямого цилиндрического стержня, составленного из двух одинаковых по объёму половинок. Плотность и удельная теплоёмкость материала одной половинки ρ_1=1500 кг/м^3 и c_1=300 Дж/кг·$^{\text{O}}$C, а другой – ρ_2=4500 кг/м^3 и c_2=600 Дж/кг·$^{\text{O}}$C. Кирилл поставил стержень на более плотное основание и равномерно нагрел призму по высоте, так что нижняя часть имела температуру t_1=30 $^{\text{O}}$C, а верхняя часть – t_2=60$^{\text{O}}$C. Какой будет температура стержня после завершения теплообмена? Потерями тепла пренебречь.

Ответ: ≈40 $^{\text{O}}$C.

Решение.

Нижняя половинка тяжелее верхней в 3 раза. **(3 балла)**

Температура в месте соединения половинок $t = 45$ ℃. **(3 балла)**

Если бы между половинками не было теплообмена, то температура верхней стала бы $t_{\text{в}} = \frac{t_2+t}{2} = 52,5$ ℃, **(2 балла)**

а нижней: $t_{\text{н}} = \frac{t_1+t}{2} = 37,5$ ℃. **(2 балла)**

При наличии теплообмена между половинками:

$c_1\rho_1(52,5 - T) = c_2\rho_2(T - 37,5)$. **(2 балла)**

Получаем $T \approx 40$ ℃. **(3 балла)**

8. (*15 баллов*) Самолёт вылетел из Салехарда 19 января в 22:10 и прилетел в Сочи 20 января в 1:30. В обратном направлении он вылетел 21 января в 11:50 и прилетел в Салехард также 21 января в 19:10. Определите разницу часовых поясов Салехарда и Сочи и время полёта в одну сторону.

Ответ: 2 часа и 5 часов 20 минут.

Решение.

Получаем системы из двух уравнений:

1 час 30 минут (20 января) – 22 часа 10 минут (19 января) = 3 часа 20 минут = $t_{\text{полета}} - \Delta_{\text{часовых поясов}}$. **(3 балла)**

19 часов 10 минут – 11 часов 50 минут = 7 часов 20 минут = $t_{\text{полета}} + \Delta_{\text{часовых поясов}}$. **(3 балла)**

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$2\Delta_{\text{часовых поясов}} = 4$ часа.

Разница часовых поясов:

$\Delta_{\text{часовых поясов}} = 2$ часа. **(5 баллов)**

Время полёта: $t_{\text{полета}} = 7$ часов 20 минут $- \Delta_{\text{часовых поясов}} = 5$ часов 20 минут.

(4 балла)

1. (*12 баллов*) Расположите в порядке возрастания числа

$$x = \frac{222\ldots21}{222\ldots23}, \qquad y = \frac{333\ldots31}{333\ldots34}, \qquad z = \frac{444\ldots41}{444\ldots45}.$$

В числителе и знаменателе каждой дроби стоят 2026-значные числа.

Ответ: $z < y < x$.

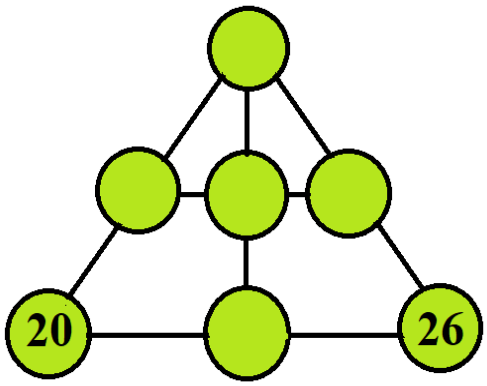
Решение. Рассмотрим дроби $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$. Имеем:

$\frac{1}{x} = 1 + \frac{2}{222\ldots22+1} = 1 + \frac{1}{111\ldots11+\frac{1}{2}}$; $\quad \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{111\ldots11+\frac{1}{3}}$;

$\frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{111\ldots11+\frac{1}{4}}$. Поэтому $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z}$, откуда $z < y < x$.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Записаны числа $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ – это 4 балла. Получено $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z}$ – это 7 баллов. Ответ угадан – 2 балла.

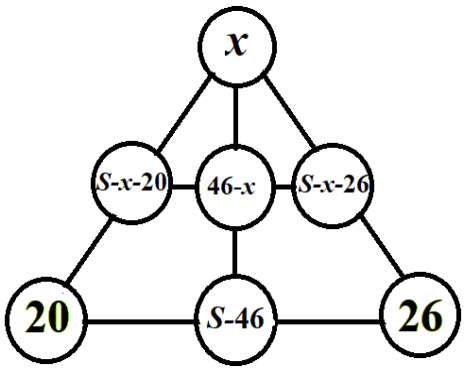
2. (*12 баллов*) В треугольнике расположены семь кругов, в двух из них записаны данные числа (см. рис.).



Расставьте в свободных кругах натуральные числа так, чтобы сумма чисел по каждой прямой, содержащей три круга, была одна и та же. Найдите количество возможных расстановок.

Ответ: 30.

Решение. Пусть сумма чисел на каждой прямой равна *S*, а число в круге на вершине треугольника – *x*. Тогда получаем расстановку (см. рис):



Сумма по средней прямой равна S, получаем уравнение:

$$S - x - 20 + 46 - x + S - x - 26 = S.$$

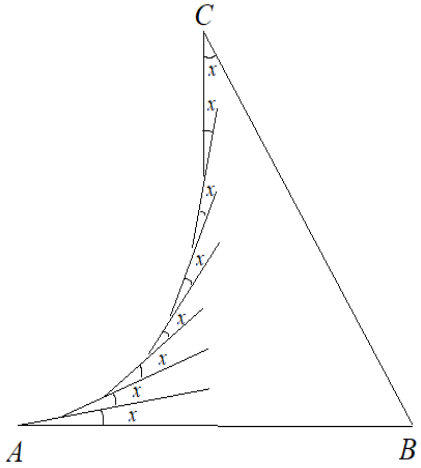
И тогда $S = 3x$. Найдём, сколько существует возможных вариантов расстановок натуральных чисел. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ 2x - 20 \geq 1, \\ 46 - x \geq 1, \\ 2x - 26 \geq 1, \\ 3x - 46 \geq 1. \end{cases}$$

Система равносильна системе $\begin{cases} x \geq 15\frac{2}{3}, \\ x \leq 45. \end{cases}$ Тогда возможные значения для x: 16, 17, …, 45. То есть всего 30 возможных вариантов.

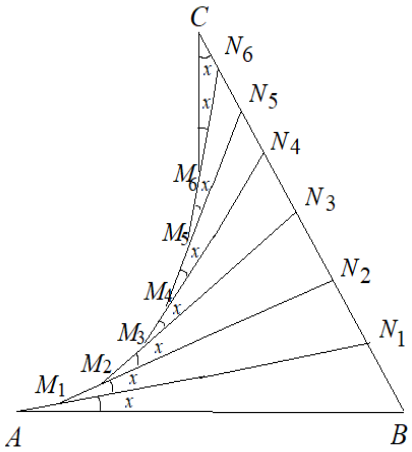
Критерии оценивания. Ответ угадан, ставим 2 балла. Приведён правильный пример – 3 балла. Если правильно найдены несколько (не все) значений x, то 6 баллов. При правильном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Дан $\angle ABC = 60°$. Из точки A внутри угла проведён луч, образующий с AB угол в x градусов. Из некоторой точки этого луча снова проведён луч, также образующий с первым лучом угол в x градусов. И так далее. Всего аналогичным образом было построено 7 лучей (смотри рисунок). Оказалось, что седьмой луч проходит через точку C и образует с BC угол в x градусов. Найдите x (в градусах).



Ответ: 15.

Решение. Пусть $A, M_1, M_2, \ldots, M_6$ – начальные точки 7 лучей. Продолжим все лучи до пересечения с прямой BC. Точки пересечения обозначим соответственно N_1, N_2, N_3,… N_6. Последний седьмой луч пересекает прямую BC в точке C.



Тогда $\angle AN_1N_2 = 60° + x$, $\angle M_1N_2N_3 = 60° + 2x$, $\angle M_2N_3N_4 = 60° + 3x$, …, $\angle M_6N_6C = 60° + 6x$. Из треугольника M_6N_6C: $x + x + 60° + 6x = 180°$. Следовательно, $8x = 120°$, $x = 15°$.

Критерии оценивания. Проведены дополнительные построения – 3 балла. Правильно найдены углы с вершинами N_i – ещё 5 баллов. Получено основное уравнение – ещё 3 балла. Арифметическая ошибка – минус 2 балла. Если ответ угадан – 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Маша, Даша и Саша проходили несколько тестов по различным разделам математики и заняли все призовые места во всех тестах. При прохождении каждого теста за 1-ое место участник получает a баллов, за второе – b баллов и за третье – c баллов, причём $a > b > c > 0$. В итоге, Маша набрала 28 баллов за все тесты, Даша – 17 баллов, а Саша – 12 баллов. Маша была второй в тесте по алгебре. Кто была второй в тесте по геометрии?

Ответ: Даша.

Решение. Сумма баллов по всем тестам у ребят равна 57 и $a + b + c \geq 6$, так как баллы различные. 57 должно делиться на $a + b + c$. Единственный вариант $a + b + c = 19$, а пройденных тестов 3. Маша не могла набрать b баллов по всем тестам (28 не делится на 3), но точно набрала b баллов по алгебре. Варианты $a + b + c$, $b + 2c$, $2b + c$ невозможны, так как меньше 28. Остаются варианты $28 = 2a + b$ или $28 = a + 2b$. Второй вариант невозможен, так как в этом случае $b - c = 9$. Из условия $28 = 2a + b$, следует, что b – четное число. Получаем варианты:

Если $b = 2$, $c = 1$, $a = 13$, что невозможно;

Если $b = 4$, $a = 12$, $c = 3$, то невозможно получить баллы Даши;

Если $b = 6$, $a = 11$, $c = 2$, то невозможно получить баллы Даши;

Если $b = 8$, $a = 10$, $c = 1$, то это единственный возможный вариант. Итак, Маша набрала следующие баллы: $28 = 10 + 10 + 8$. Даша набрала баллы: $17 = 8 + 8 + 1$. Саша

набрала баллы: $12 = 10 + 1 + 1$. Получаем, что в тесте по алгебре: Саша – первая, Маша – вторая, и Даша – третья. В остальных тестах второй может быть только Даша.

Критерии оценивания. Отмечено, что 57 делится на $a + b + c$, ставим 4 балла. Получено, что тестов 3, а $a + b + c$ =19 – ещё плюс 2 балла. Вывод, что b – чётное, ещё плюс 1 балл. Перебор вариантов неполный, но ответ верный – 9 баллов. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение – 13 баллов.

В задачах 5-8 оценивается именно решение (рассуждения, формулы, понятная логика)! Просто правильный ответ без вывода не оценивается!

5. (*10 баллов*) Два муравьишки умеют бегать с одинаковыми скоростями u=2 см/с. Муравьишки очень сильные, но бежать они могут, пока на них действует сила, меньшая F=4 Н. Сначала муравьишки взяли за концы пружину жёсткостью k=10 мН/см и побежали в противоположных направлениях. Через какое время муравьишки перестанут бежать? Потом муравьишки эту пружину отпустили, разрезали пополам, а обе части расположили параллельно, после чего начали снова тянуть в противоположные стороны. Через какое время они снова перестанут бежать?

Ответ: 100 с и 25 с.

Решение. В момент, когда муравьишки перестанут бежать, растяжение пружины равно $x = \frac{F}{k} = \frac{4}{10 \cdot \frac{10^{-3}\text{Н}}{\text{см}}} = 400$ см. **(2 балла)**

Следовательно, каждый из муравьишек пробежал по $\frac{x}{2}$. **(2 балла)**

Времени прошло $t_1 = \frac{x}{2 \cdot u} = \frac{400}{2 \cdot 2} = 100\ c$. **(2 балла)**

Если пружину разрезать на две одинаковые части, то жёсткость каждой из них: $k_1 = 2k$. **(1 балл)**

Если эти части сложить параллельно, то их общая жёсткость:

$k_0 = 2k_1 = 4k$. **(1 балл)**

Получаем, что раз жёсткость выросла в 4 раза, то $t_2 = \frac{t_1}{4} = 25$ с. **(2 балла)**

6. (*10 баллов*) В цирке есть пять совершенно одинаковых акробатов-силачей. На первом представлении один силач поднимал остальных четверых одновременно, стоя при этом на двух ногах. Оказалось, что давление на пол составило 25 кПа. Какое давление на пол будет оказывать один силач, стоящий на двух ногах?

Ответ: 5000 Па.

Решение. Пусть масса одного силача равна m, а площадь одной ступни – S.

Получаем, что давление в первом случае $p_1 = \frac{5mg}{2S} = 25000$. **(5 балла)**

Во втором случае: $p_2 = \frac{mg}{2S} = 5000$ Па. **(5 балла)**

7. (*15 баллов*) Три бегуна собрались на круглом стадионе длиной 600 м. Выстроившись у линии старта, они дождались свистка и побежали. Феликс и Талгат побежали по часовой стрелке со скоростями 3 м/с и 2 м/с соответственно. Андрей побежал в другую сторону со скоростью 2 м/с. Через какое время все трое снова встретятся?

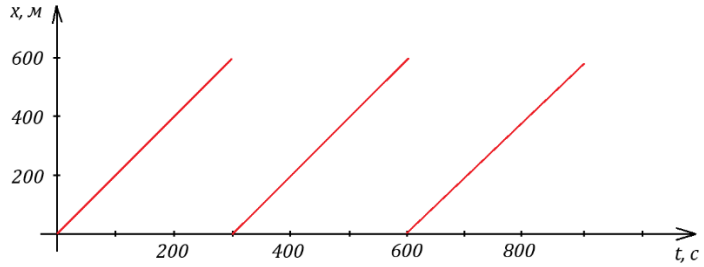
Ответ: 600 с.

Решение. Талгат и Андрей пробегут круг за $\frac{600\text{м}}{2\ \text{м/с}} = 300$ с, а Феликс за $\frac{600\ \text{м}}{3\ \text{м/с}} = 200$ с.

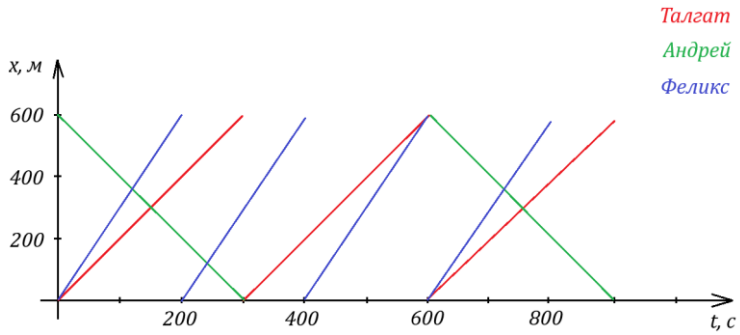
(3 балла)

Пусть у линии старта координата 0 м. Тогда через половинку круга координата будет 300 м, а еще через половинку 600 м. Далее бегун снова находится на старте. Тогда, например, график зависимости координаты от времени для Талгата будет выглядеть так:

(2 балла)



Так как Андрей движется в другую сторону, то он будет двигаться от отметки 600 м к старту. Подобный график для всех ребят одновременно выглядит так: **(5 баллов)**



Пересечение прямых на графике – это встреча. Если пересекаются все три прямые (Талгата, Феликса и Андрея), то это искомая “тройная” встреча.

Из графика следует, что она произошла через 600 с после старта. **(5 баллов)**

8. (*15 баллов*) У некоторого учёного Кирилла есть два стакана с разными жидкостями одинакового объёма. Кирилл взял шарик и закинул его в первый стакан и увидел, что шарик стал плавать в толще жидкости. Затем Кирилл достал шарик и бросил его во второй стакан. Оказалось, что в этом случае шарик ровно наполовину погружен в жидкость. Кирилл решил поэкспериментировать, поэтому взял большую ёмкость, в которой смешал обе жидкости вместе, после чего снова погрузил шарик. Какая часть объёма шарика будет

находиться на поверхности в этом случае? Считайте, что жидкость из стаканов не выливается.

Ответ: 1/3.

Решение.

Пусть масса шарика m, объем V, а плотности жидкостей в первом и втором стакане ρ_1 и ρ_2 соответственно.

Первое условие равновесия для погружения в первую жидкость:

$mg = F_{\text{арх1}}$.

$F_{\text{арх1}} = \rho_1 g V_{\text{погруж1}} = \rho_1 g V$.

Отсюда $\rho_1 = \frac{m}{V}$. **(3 балла)**

Первое условие равновесия для погружения во вторую жидкость:

$mg = F_{\text{арх2}}$.

$F_{\text{арх2}} = \rho_2 g V_{\text{погруж2}} = \rho_2 g \frac{V}{2}$.

Отсюда $\rho_2 = \frac{2m}{V}$. **(3 балла)**

Условие равновесия для погружения в смесь со средней плотностью ρ:

$mg = F_{\text{арх}}$.

$F_{\text{арх}} = \rho g V_{\text{погруж}} = \rho g x V$, **(3 балла)**

где x – часть объема, погруженного в жидкость,

а $\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{V} + \frac{2m}{V}\right) = \frac{3}{2}\frac{m}{V}$. **(3 балла)**

Подставим:

$mg = \frac{3}{2}\frac{m}{V} g x V$.

Тогда $x = \frac{2}{3}$ - погруженная часть, а над поверхностью жидкости находится $\frac{1}{3}$ от объема шарика. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

7 класс **Заключительный тур** **2025-2026**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Расположите в порядке возрастания числа

$$x = \frac{444\ldots41}{444\ldots45}, \qquad y = \frac{555\ldots51}{555\ldots56}, \qquad z = \frac{666\ldots61}{666\ldots67}.$$

В числителе и знаменателе каждой дроби стоят 2026-значные числа.

Ответ: $z < y < x$.

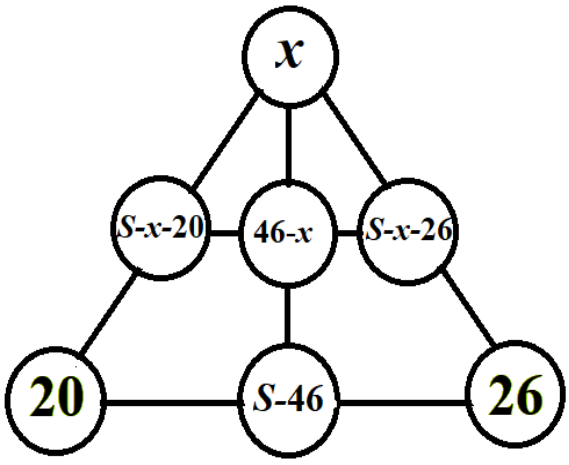
Решение. Рассмотрим дроби $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$. Имеем:

$\frac{1}{x} = 1 + \frac{4}{444\ldots44+1} = 1 + \frac{1}{111\ldots11+\frac{1}{4}}$, $\frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{111\ldots11+\frac{1}{5}}$,

$\frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{111\ldots11+\frac{1}{6}}$. Поэтому $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z}$, откуда $z < y < x$.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Записаны числа $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ – это 4 балла. Получено $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z}$ – это 7 баллов. Ответ угадан – 2 балла.

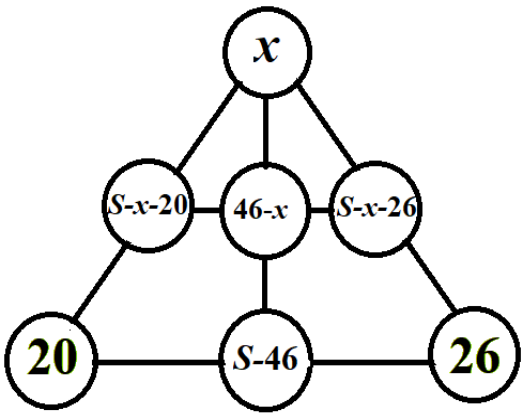
2. (*12 баллов*) В треугольнике расположены семь кругов, в двух из них записаны данные числа (см. рис.).



Расставьте в свободных кругах натуральные числа так, чтобы сумма чисел по каждой прямой, содержащей три круга, была одна и та же. Найдите наибольшее возможное значение такой суммы.

Ответ: 135.

Решение. Пусть сумма чисел на каждой прямой равна *S*, а число в круге на вершине треугольника – *x*. Тогда получаем расстановку (см. рис):



Сумма по средней прямой равна S, получаем уравнение:

$$S - x - 20 + 46 - x + S - x - 26 = S.$$

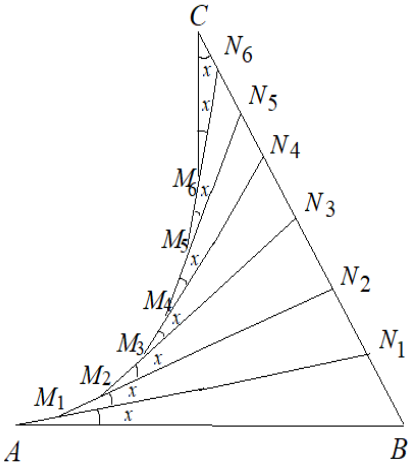
И тогда $S = 3x$. Найдём, сколько существует возможных вариантов расстановок натуральных чисел. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ 2x - 20 \geq 1, \\ 46 - x \geq 1, \\ 2x - 26 \geq 1, \\ 3x - 46 \geq 1. \end{cases}$$

Система равносильна системе $\begin{cases} x \geq 15\frac{2}{3}, \\ x \leq 45. \end{cases}$ Тогда возможные значения для x: 16, 17, …, 45. То есть при x=45 получаем наибольшее значение суммы: S=135.

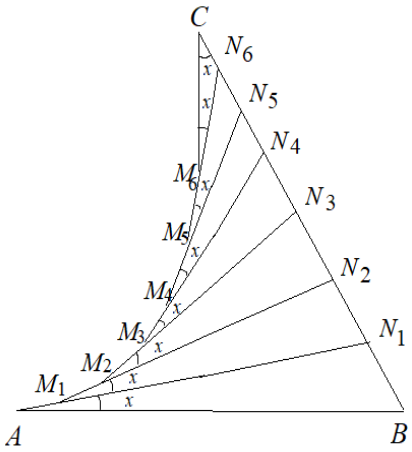
Критерии оценивания. Ответ угадан, ставим 2 балла. Приведён правильный пример – 3 балла. Если правильно найдены несколько (не все) значений x, то 6 баллов. При правильном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Дан $\angle ABC = 68°$. Из точки A внутри угла проведён луч, образующий с AB угол в x градусов. Из некоторой точки этого луча снова проведён луч, также образующий с первым лучом угол в x градусов. И так далее. Всего аналогичным образом было построено 7 лучей (смотри рисунок). Оказалось, что седьмой луч проходит через точку C и образует с BC угол в x градусов. Найдите x (в градусах).



Ответ: 14.

Решение. Пусть $A, M_1, M_2, \ldots, M_6$ – начальные точки 7 лучей. Продолжим все лучи до пересечения с прямой BC. Точки пересечения обозначим соответственно N_1, N_2, N_3,… N_6. Последний седьмой луч пересекает прямую BC в точке C.



Тогда $\angle AN_1N_2 = 68° + x$, $\angle M_1N_2N_3 = 68° + 2x$, $\angle M_2N_3N_4 = 68° + 3x$, …, $\angle M_6N_6C = 68° + 6x$. Из треугольника M_6N_6C: $x + x + 68° + 6x = 180°$. Следовательно, $8x = 112°$, $x = 14°$.

Критерии оценивания. Проведены дополнительные построения – 3 балла. Правильно найдены углы с вершинами N_i – ещё 5 баллов. Получено основное уравнение – ещё 3 балла. Арифметическая ошибка – минус 2 балла. Если ответ угадан – 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Маша, Даша и Саша проходили несколько тестов по различным разделам математики и заняли все призовые места во всех тестах. При прохождении каждого теста за 1-ое место участник получает a баллов, за второе – b баллов и за третье – c баллов, причём $a > b > c > 0$. В итоге, Маша набрала 20 баллов за все тесты, Даша – 10 баллов, а Саша – 9 баллов. Маша была второй в тесте по алгебре. Кто была второй в тесте по геометрии?

Ответ: Саша.

Решение. Сумма баллов по всем тестам у ребят равна 39 и $a + b + c \geq 6$, так как баллы различные. 39 должно делиться на $a + b + c$. Единственный вариант возможен $a + b + c = 13$, а пройденных тестов 3. Маша не могла набрать b баллов по всем тестам (20 не делится на 3), но точно набрала b баллов по алгебре. Варианты $a + b + c$, $b + 2c$, $2b + c$ невозможны, так как меньше 20. Остаются варианты $20 = 2a + b$ или $20 = a + 2b$, Второй вариант невозможен, так как в этом случае $b - c = 7$. Из условия $20 = 2a + b$, следует, что b – чётное число. Получаем варианты:

Если $b = 2$, $c = 2$, $a = 9$, то есть условие задачи не выполняется;

Если $b \geq 6$, то $a < b$, что тоже невозможно;

Если $b = 4$, $a = 8$, $c = 1$ – единственный возможный вариант.

Итак, Маша набрала следующие баллы: $20 = 8 + 8 + 4$. Даша набрала баллы: $10 = 8 + 1 + 1$ и Саша набрала баллы: $9 = 4 + 4 + 1$.

Тогда в тесте по алгебре: Даша – первая, Маша – вторая, и Саша – третья.

В остальных тестах второй может быть только Саша.

Критерии оценивания. Отмечено, что 37 делится на $a + b + c$, ставим 4 балла. Получено, что тестов 3, а $a + b + c$ =13 – ещё плюс 2 балла. Вывод, что b – чётное, ещё плюс 1 балл. Перебор вариантов неполный, но ответ верный – 9 баллов. Ответ угадан – 2 балла. Полное решение – 13 баллов.

Внимание. В задачах 5-8 оценивается именно решение (рассуждения, формулы, понятная логика)! Просто правильный ответ без вывода не оценивается.

5. (*10 баллов*) Два муравьишки умеют бегать с одинаковыми скоростями u=1,5 см/с. Муравьишки очень сильные, но бежать они могут, пока на них действует сила, меньшая F=3 Н. Сначала муравьишки взяли за концы пружину жёсткостью k=5 мН/см и побежали в противоположных направлениях. Через какое время муравьишки перестанут бежать? Потом муравьишки эту пружину отпустили, разрезали пополам, а обе части расположили параллельно, после чего начали снова тянуть в противоположные стороны. Через какое время они снова перестанут бежать?

Ответ: 200 с и 50 с.

Решение. В момент, когда муравьишки перестанут бежать, растяжение пружины равно $x = \frac{F}{k} = \frac{3}{5 \cdot \frac{10^{-3}\text{Н}}{\text{см}}} = 600$ см. **(2 балла)**

Следовательно, каждый из муравьишек пробежал по $\frac{x}{2}$. **(2 балла)**

Времени прошло $t_1 = \frac{x}{2 \cdot u} = \frac{600}{2 \cdot 1{,}5} = 200\ c$. **(2 балла)**

Если пружину разрезать на две одинаковые части, то жёсткость каждой из них $k_1 = 2k$. **(1 балл)**

Если эти части сложить параллельно, то их общая жёсткость:

$k_0 = 2k_1 = 4k$. **(1 балл)**

Получаем, что раз жёсткость выросла в 4 раза, то $t_2 = \frac{t_1}{4} = 50$ с. **(2 балла)**

6. (*10 баллов*) В цирке есть пять совершенно одинаковых акробатов-силачей. На первом представлении один силач поднимал остальных четверых одновременно, стоя при этом на одной ноге. Оказалось, что давление на пол составило 40 кПа. Какое давление на пол будет оказывать один силач, стоящий на двух ногах?

Ответ: 4000 Па.

Решение. Пусть масса одного силача равна m, а площадь одной ступни – S.

Получаем, что давление в первом случае: $p_1 = \frac{5mg}{S} = 40000$. **(5 баллов)**

Во втором случае: $p_2 = \frac{mg}{2S} = 4000$ Па. **(5 баллов)**

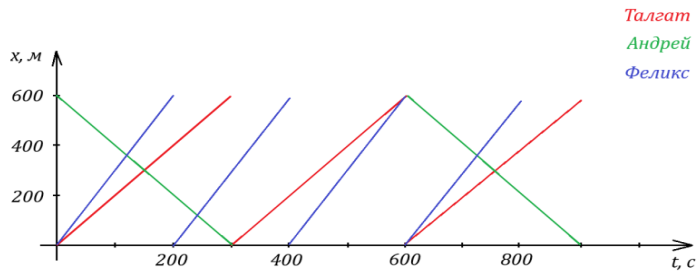
7. (*15 баллов*) Три бегуна собрались на круглом стадионе длиной 600 м. Выстроившись у линии старта, они дождались свистка и побежали. Феликс и Талгат побежали по часовой стрелке со скоростями 3 м/с и 2 м/с соответственно. Андрей побежал в другую сторону со скоростью 2 м/с. Через какое время все трое снова встретятся?

Ответ: 600 с.

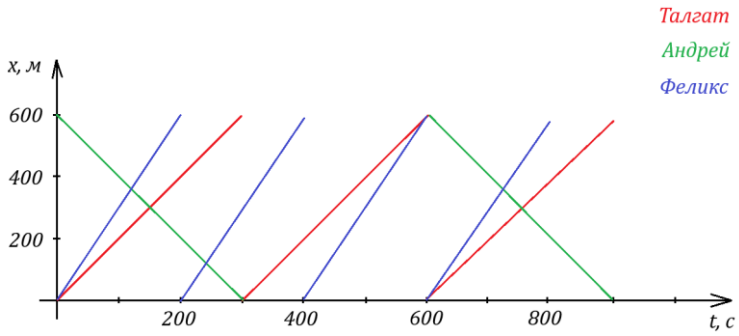
Решение.

Талгат и Андрей пробегут круг за $\frac{600\text{м}}{2\text{ м/с}} = 300$ с, а Феликс за $\frac{600\text{ м}}{3\text{ м/с}} = 200$ с. **(3 балла)**

Пусть у линии старта координата 0 м. Тогда через половинку круга координата будет 300 м, а еще через половинку 600 м. Далее бегун снова находится на старте. Тогда, например, график зависимости координаты от времени для Талгата будет выглядеть так: **(2 балла)**



Так как Андрей движется в другую сторону, то он будет двигаться от отметки 600 м к старту. Подобный график для всех ребят одновременно выглядит так: **(5 баллов)**



Пересечение прямых на графике – это встреча. Если пересекаются все три прямые (Талгата, Феликса и Андрея), то это искомая “тройная” встреча.

Из графика следует, что она произошла через 600 с после старта. **(5 баллов)**

8. (*15 баллов*) У некоторого учёного Кирилла есть два стакана с разными жидкостями одинакового объёма. Кирилл взял шарик и закинул его в первый стакан и увидел, что шарик стал плавать в толще жидкости. Затем Кирилл достал шарик и бросил его во второй стакан. Оказалось, что в этом случае шарик ровно на одну треть объёма погружен в жидкость. Кирилл решил поэкспериментировать, поэтому взял большую емкость, в которой смешал обе жидкости вместе, после чего снова погрузил шарик. Какая часть

объёма шарика будет находиться на поверхности в этом случае? Считайте, что жидкость из стаканов не выливается.

Ответ: 1/2.

Решение.

Пусть масса шарика m, объем V, а плотности жидкостей в первом и втором стакане ρ_1 и ρ_2 соответственно.

Первое условие равновесия для погружения в первую жидкость:

$mg = F_{\text{арх1}}$.

$F_{\text{арх1}} = \rho_1 g V_{\text{погруж1}} = \rho_1 g V$.

Отсюда $\rho_1 = \frac{m}{V}$. **(3 балла)**

Первое условие равновесия для погружения во вторую жидкость:

$mg = F_{\text{арх2}}$.

$F_{\text{арх2}} = \rho_2 g V_{\text{погруж2}} = \rho_2 g \frac{V}{3}$.

Отсюда $\rho_2 = \frac{3m}{V}$. **(3 балла)**

Условие равновесия для погружения в смесь со средней плотностью ρ:

$mg = F_{\text{арх}}$.

$F_{\text{арх}} = \rho g V_{\text{погруж}} = \rho g x V$, **(3 балла)**

где x – часть объема, погруженного в жидкость,

а $\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{V} + \frac{3m}{V}\right) = 2\frac{m}{V}$. **(3 балла)**

Подставим:

$mg = 2\frac{m}{V} g x V$.

Тогда $x = \frac{1}{2}$ - погруженная часть, и над поверхностью жидкости находится $\frac{1}{2}$ от объема шарика. **(3 балла)**

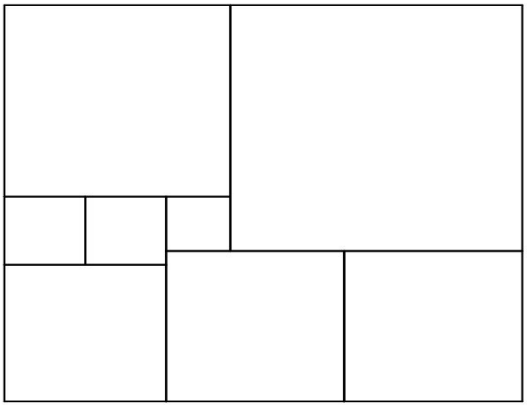
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

6 класс **Заключительный тур** **2025-2026**

Вариант 1

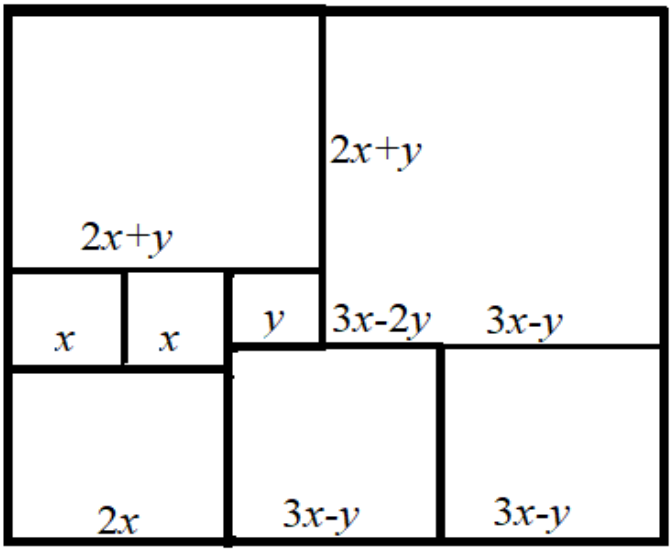
Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Прямоугольник разрезан на 8 квадратов (смотрите рисунок). Длина прямоугольника равна 64. Найдите его ширину.



Ответ: 58.

Решение. Сторону двух маленьких равных квадратов в центре обозначим за x, а сторону центрального квадратика – за y. Тогда получаем стороны (см. рис.).



Рассмотрим верхний правый квадрат. Получаем уравнение относительно сторон $2x + 2y = 6x - 3y$, откуда $x = \frac{5}{4}y$. Длина прямоугольника $8x - 2y = 64$ или $8y = 64, y = 8$, а $x = 10$. В итоге получаем ширину прямоугольника $5x + y = 58$.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов.
Получены верные соотношения между сторонами квадратов – 8 баллов. При верном ходе решения имеются арифметические ошибки – минус 2 балла. Ответ угадан (решение отсутствует) – 2 балла.

2. (*13 баллов*) В ребусе каждая буква обозначает цифру, причём разные буквы обозначают разные цифры.

$$\begin{array}{r} \text{СНЕГ} \\ +\text{СНЕГ} \\ +\text{СНЕГ} \\ \cdots \\ +\text{СНЕГ} \\ \hline \text{ЗИМА} \end{array}$$

Какое наибольшее количество (***n***) слов «**СНЕГ**» может быть в ребусе? Какое наименьшее число может быть зашифровано словом «**ЗИМА**» при этом ***n***? Найдите соответствующее решение ребуса.

Ответ: 9; СНЕГ =1042; ЗИМА=9378.

Решение. Заметим, что все числа в ребусе четырёхзначные, и в словах «**СНЕГ**» и «**ЗИМА**» буквы не повторяются, то есть цифры в числах, соответствующих этим словам, различны. Чтобы количество слов «СНЕГ» было наибольшим, число, соответствующее этому слову должно быть наименьшим. Чтобы получалось четырёхзначное число «**ЗИМА**» $n \le 9$. Наименьшее четырёхзначное число с разными цифрами – 1023. Но при этом требуется, чтобы при умножении на 9 получалось число с различными и неповторяющимися с числом, зашифрованном в слове «**СНЕГ**», цифрами. Числа 102*, где * – любая цифра, отличная от 0, 1, 2, не подходят, так как при умножении на 9 вторая цифра 2. Числа 103*, где * – любая цифра, отличная от 0, 1, 3 так же не подходят (либо вторая цифра 3, либо повтор других цифр). Следующее число 1042. При умножении на 9 получаем 9378. И это наименьшее возможное число для слова «**ЗИМА**».

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.
Сделан вывод, что n=9, ставим 4 балла. Приведено правильное решение ребуса, без обоснования, ставим 6 баллов. Если приведено решение ребуса при n <9, то ставим 5 баллов.

3. (*12 баллов*) Для натуральных чисел a, b, c выполнено условие:

$$18a+19b+21c=136.$$

Чему равно выражение $a+b+c$? Найдите все возможные его значения. Ответ обоснуйте.

Ответ: 7.

Решение. Имеем: $18(a+b+c) \le 136 \Rightarrow a+b+c \le 7\frac{5}{9}$;

$$21(a+b+c) \ge 136 \Rightarrow a+b+c \ge 6\frac{10}{21}.$$

Следовательно, $a+b+c$ может равняться только 7. Реализуется при $a=3; b=1; c=3$.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Без примера – 9 баллов. Пример без оценки – 4 балла. Правильный ответ без обоснования – 2 балла.

4. (*13 баллов*) В некотором городе живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Причём лжецы на вопрос о количестве называют число на 2 больше или меньше, чем правильный ответ. Опросили двух жителей города и спросили у каждого, сколько рыцарей и лжецов проживает в городе. Первый ответил: «Не считая меня, 2001 лжец и 2002 рыцаря», а второй: «Не считая меня, 2000 лжецов и 1999 рыцарей». Сколько лжецов и рыцарей в городе?

Ответ: 2000 рыцарей и 2000 лжецов.

Решение. Так как у жителей разные ответы, то они не могут быть одновременно рыцарями или лжецами. Пусть первый житель рыцарь, а второй лжец. Тогда из утверждения первого в городе рыцарей 2003 и лжецов 2001, а из утверждения второго число рыцарей должно отличаться на 2, но $2003 - 1999 = 4$, что невозможно. Значит, первый житель – лжец, а второй – рыцарь. Проверим это. Из утверждения второго в городе рыцарей 2000 и лжецов 2000, что соответствует утверждению первого: число лжецов отличается на 2: $2002 - 2000 = 2$, и число рыцарей отличается на 2: $2002 - 2000 = 2$.

Критерии оценивания. Участник отметил, что отвечающие – разные по статусу, но затем сделал неверный вывод – ставим 6 баллов. Полное решение – 13 баллов. Правильный ответ приведён без решения – 2 балла.

Внимание! В задачах 5-8 оценивается именно решение (рассуждения, формулы, понятная логика)! Просто правильный ответ без вывода не оценивается!

5. (*10 баллов*) Два одинаковых автомобиля едут в одном направлении с равными скоростями v_1=v_2=25 м/с. Расстояние между ними l_0=180 м. На их пути встречается знак ограничения скорости 50 км/ч. Доехав до знака, оба водителя начинают ехать с требуемой скоростью. Какая между ними будет дистанция, пока оба автомобиля находятся в зоне действия знака?

Ответ: 100 м.

Решение. Переведём начальные скорости автомобилей в км/ч:

v_1=v_2=25 м/с=90 км/ч. **(2 балла)**

С момента, как первый автомобиль доехал до знака ограничения до момента, как до него доехал второй автомобиль, прошло время $t = \frac{l_0}{v_1}$. **(4 балла)**

За это время второй автомобиль уехал на $l = t \cdot v_к = \frac{l_0}{v_1} \cdot v_к = \frac{180}{90} \cdot 50 = 100$ м. **(4 балла)**

Это и есть дистанция между автомобилями в зоне действия знака.

6. (*10 баллов*) Знахарь приготовил отвар из трав и решил перелить его из кастрюли, в которой он готовился, в бутыль для хранения. Ёмкость бутыли ровно три четверти (четверть – это древнерусская единица измерения объёма). В распоряжении знахаря есть два ковша. Ёмкость первого ковша – один штоф, ёмкость второго – одна кружка (штоф и кружка – это также единицы измерения объёма). Известно, что 1 четверть = 3,075 литра, 1 штоф = 1,54 литра, 1 кружка = 1,23 литра. Знахарь взял первый ковш и четыре раза

наполнил его доверху, и перелил содержимое в бутыль. После этого он взял в руки второй ковш и, также заполняя его доверху, продолжил заполнять бутыль. Сколько вторых ковшей еще поместится в бутыль? Ответ округлите до десятых.

Ответ: ≈2,5 ковша.

Решение. Ёмкость бутыли $V_1 = 3$ четверти $= 3 \cdot 3{,}075 = 9{,}225$ литра.

(3 балла)

С помощью первого ковша было налито $V_2 = 4$ штофа $= 4 \cdot 1{,}54 = 6{,}16$ литра.

(3 балла)

В бутыли осталось свободно $V = V_1 - V_2 = 9{,}225 - 6{,}16 = 3{,}065$ литра.

(2 балла)

Необходимо еще $\frac{3{,}065}{1{,}23} \approx 2{,}5$ ковша. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Пешеход стоит на остановке и, поглядывая на часы, определяет с помощью лазерного дальномера расстояние до грузовика, который едет по прямой дороге, проходящей мимо остановки. Оказалось, когда часы показывали 13 ч 15 мин 20 с, расстояние до грузовика было 150 метров. Когда часы показали 13 ч 15 мин 30 с, то расстояние было уже 50 метров. Определите показания часов (с точностью до одной десятой секунды) в момент, когда грузовик проехал мимо пешехода.

Ответ: 13 ч 15 мин 35,0 с или 13 ч 15 мин 27,5 с.

Решение. Прошло 10 секунд, возможны два варианта. **(1 балл)**

Первый: грузовик не доехал до пешехода, то есть проехал 100 метров. **(2 балла)**

Его скорость $v = \frac{s}{t} = \frac{100}{10} = 10$ м/с. **(2 балла)**

Следовательно, 150 метров он преодолеет за $\tau = \frac{150}{v} = 15$ секунд. **(2 балла)**

Показания часов в этом случае 13 ч 15 мин 35,0 с. **(1 балл)**

Второй вариант: грузовик уже успел проехать мимо пешехода, то есть проехал 200 метров.

(2 балла)

Его скорость $v = \frac{s}{t} = \frac{200}{10} = 20$ м/с. **(2 балла)**

Следовательно, 150 метров он преодолеет за $\tau = \frac{150}{v} = 7{,}5$ секунд. **(2 балла)**

Показания часов в этом случае: 13 ч 15 мин 27,5 с. **(1 балл)**

Примечание: полный балл можно получить только при рассмотрении обоих возможных вариантов развития ситуации

8. (*15 баллов*) Два таракана, располагаясь на противоположных концах 100 сантиметровой прямой соломинки, одновременно начинают ползти навстречу друг другу. Скорость одного равна 2 см/с, а второго – 3 см/с. В момент встречи они разворачиваются и ползут обратно. Добравшись до концов соломинки, они опять

разворачиваются и снова ползут навстречу друг другу. И так далее. Определите, в какой момент времени от начала движения тараканы встретятся во второй раз? На каком расстоянии от центра соломинки произойдёт их 2026 встреча?

Ответ: 60 с и 10 см.

Решение. Скорость сближения (удаления) тараканов:

$v = v_1 + v_2 = 2 + 3 = 5$ см/с. **(3 балла)**

Первая встреча состоялась через $t_1 = \frac{s}{v} = \frac{100}{5} = 20$ секунд. **(3 балла)**

Вторая встреча состоялась через $t_2 = t_1 + \frac{2s}{v} = 20 + \frac{2 \cdot 100}{5} = 60$ секунд после начала движения. **(3 балла)**

Все встречи происходят в одном месте. **(3 балла)**

На расстоянии $x = \frac{l}{2} - v_1 t_1 = \frac{100}{2} - 2 \cdot 20 = 10$ см от центра. **(3 балла)**

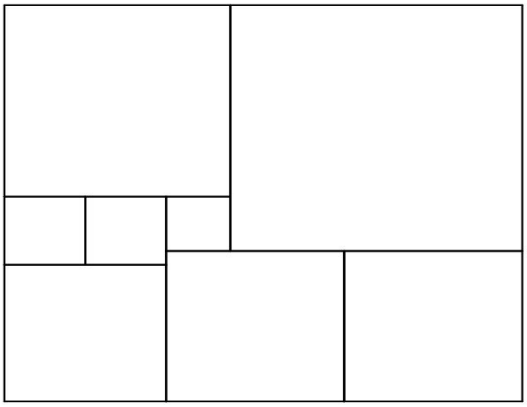
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

6 класс **Заключительный тур** **2025-2026**

Вариант 2

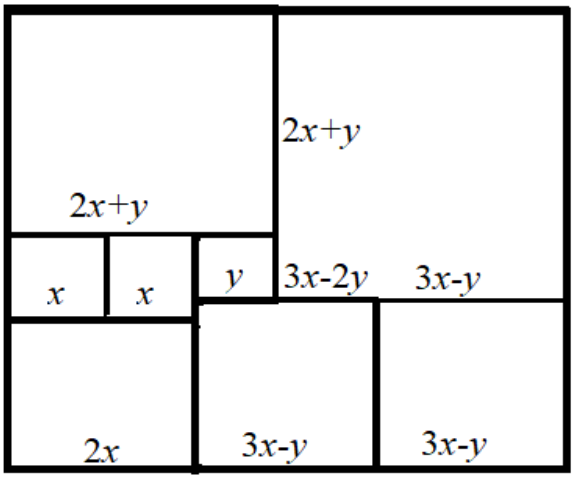
Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Прямоугольник разрезан на 8 квадратов (смотрите рисунок). Длина прямоугольника равна 96. Найдите его ширину.



Ответ: 87.

Решение. Сторону двух маленьких равных квадратов в центре обозначим за x, а сторону центрального квадратика – за y. Тогда получаем стороны (см. рис.).



Рассмотрим верхний правый квадрат. Получаем уравнение относительно сторон $2x + 2y = 6x - 3y$, откуда $x = \frac{5}{4}y$. Длина прямоугольника $8x - 2y = 96$ или $8y = 96, y = 12$, а $x = 15$. В итоге получаем ширину прямоугольника $5x + y = 87$.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов.
Получены верные соотношения между сторонами квадратов – 8 баллов. При верном ходе решения имеются арифметические ошибки – минус 2 балла. Ответ угадан (решение отсутствует) – 2 балла.

2. (*13 баллов*) В ребусе каждая буква обозначает цифру, причём разные буквы обозначают разные цифры.

$$\begin{array}{r} \text{СНЕГ} \\ +\text{СНЕГ} \\ +\text{СНЕГ} \\ \ldots \\ +\text{СНЕГ} \\ \hline \text{ЗИМА} \end{array}$$

Какое наибольшее количество (***n***) слов «**СНЕГ**» может быть в ребусе? Какое наибольшее число может быть зашифровано словом «**ЗИМА**» при этом ***n***? Найдите соответствующее решение ребуса.

Ответ: 9; СНЕГ =1084; ЗИМА=9756.

Решение. Заметим, что все числа в ребусе четырёхзначные, и в словах «**СНЕГ**» и «**ЗИМА**» буквы не повторяются, то есть цифры в числах, соответствующих этим словам, различны. Чтобы получалось четырёхзначное число «**ЗИМА**» $n \leq 9$. Так как требуется получить наибольшее число, зашифрованное под словом «ЗИМА», то необходимо взять наибольшее четырёхзначное число для слова «**СНЕГ**», которое при умножении на 9 даёт также четырёхзначное число. Такое наибольшее четырёхзначное число с разными цифрами – 1098. Но при этом требуется, чтобы при умножении на 9 получалось число с различными и неповторяющимися с числом, зашифрованном в слове «**СНЕГ**», цифрами. Числа 109*, где * – любая цифра, отличная от 0, 1, 9, не подходят, так как при умножении на 9 первая цифра 9. Числа 1089, 1087, 1086, 1085 так же не подходят (в числе после умножения на 9 повтор других цифр). Следующее число 1084. При умножении на 9 получаем 9756. И это наибольшее возможное число для слова «**ЗИМА**».

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.
Сделан вывод, что n=9, ставим 4 балла. Приведено правильное решение ребуса, без обоснования, ставим 6 баллов.

3. (*12 баллов*) Для натуральных чисел a, b, c выполнено условие:

$$19a + 20b + 22c = 163.$$

Чему равно выражение $a+b+c$? Найдите все возможные его значения. Ответ обоснуйте.

Ответ: 8.

Решение. Имеем: $19(a+b+c) \leq 163 \implies a+b+c \leq 8\frac{11}{19}$;

$$22(a+b+c) \geq 163 \Longrightarrow a+b+c \geq 7\frac{9}{22}.$$

Следовательно, $a+b+c$ может равняться только 8. Реализуется при $a=3; b=2; c=3$.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Без примера – 9 баллов. Пример без оценки – 4 балла. Правильный ответ без обоснования – 2 балла.

4. (*13 баллов*) В некотором городе живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут, причём на вопрос о количестве называют число на 2 больше или меньше, чем правильный ответ. Опросили двух жителей города и спросили у каждого, сколько рыцарей и лжецов проживает в городе. Первый ответил: «Не считая меня, 4001 лжец и 4002 рыцаря», а второй: «Не считая меня, 4000 лжецов и 3999 рыцарей». Сколько лжецов и рыцарей в городе?

Ответ: 4000 рыцарей и 4000 лжецов.

Решение. Так как у жителей разные ответы, то они не могут быть одновременно рыцарями или лжецами. Пусть первый житель рыцарь, а второй лжец. Тогда из утверждения первого в городе рыцарей 4003 и лжецов 4001, а из утверждения второго число рыцарей должно отличаться на 2, но $4003 - 3999 = 4$, что невозможно. Значит, первый житель – лжец, а второй – рыцарь. Проверим это. Из утверждения второго в городе рыцарей 4000 и лжецов 4000, что соответствует утверждению первого: число лжецов отличается на 2: $4002 - 4000 = 2$, и число рыцарей отличается на 2: $4002 - 4000 = 2$.

Критерии оценивания. Участник отметил, что отвечающие – разные по статусу, но затем сделал неверный вывод – ставим 6 баллов. Полное решение – 13 баллов. Правильный ответ приведён без решения – 2 балла.

Внимание! В задачах 5-8 оценивается именно решение (рассуждения, формулы, понятная логика)! Просто правильный ответ без вывода не оценивается!

5. (*10 баллов*) Два одинаковых автомобиля едут в одном направлении с равными скоростями v_1=v_2=20 м/с. Расстояние между ними l_0=360 м. На их пути встречается знак ограничения скорости 40 км/ч. Доехав до знака, оба водителя начинают ехать с требуемой скоростью. Какая между ними будет дистанция, пока оба автомобиля находятся в зоне действия знака?

Ответ: 200 м.

Решение. Переведём начальные скорости автомобилей в км/ч:

v_1=v_2=20 м/с=72 км/ч. **(2 балла)**

С момента, как первый автомобиль доехал до знака ограничения до момента, как до него доехал второй автомобиль прошло время $t = \frac{l_0}{v_1}$. **(4 балла)**

За это время второй автомобиль уехал на $l = t \cdot v_к = \frac{l_0}{v_1} \cdot v_к = \frac{360}{72} \cdot 40 = 200$ м. **(4 балла)**

Это и есть дистанция между автомобилями в зоне действия знака.

6. (*10 баллов*) Знахарь приготовил отвар из трав и решил перелить его из кастрюли, в которой он готовился, в бутыль для хранения. Ёмкость бутыли ровно пять четвертей (четверть – это древнерусская единица измерения объёма). В распоряжении знахаря есть два ковша. Ёмкость первого ковша – два штофа, ёмкость второго – одна кружка (штоф и кружка – это также единицы измерения объёма). Известно, что 1 четверть = 3,075 литра, 1 штоф = 1,54 литра, 1 кружка = 1,23 литра. Знахарь взял первый ковш и три раза наполнил его доверху, и перелил содержимое в бутыль. После этого он взял в руки второй ковш и,

также заполняя его доверху, продолжил заполнять бутыль. Сколько вторых ковшей еще поместится в бутыль? Ответ округлите до целых.

Ответ: ≈5 ковшей.

Решение.

Ёмкость бутыли $V_1 = 5$ четвертей $= 5 \cdot 3{,}075 = 15{,}375$ литра. **(3 балла)**

С помощью первого ковша было налито $V_2 = 6$ штоф $= 6 \cdot 1{,}54 = 9{,}24$ литра. **(3 балла)**

В бутыли осталось свободно $V = V_1 - V_2 = 15{,}375 - 9{,}24 = 6{,}135$ литра. **(2 балла)**

Необходимо еще $\frac{6{,}135}{1{,}23} \approx 5$ ковшей. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Пешеход стоит на остановке и, поглядывая на часы, определяет с помощью лазерного дальномера расстояние до грузовика, который едет по прямой дороге, проходящей мимо остановки. Оказалось, когда часы показывали 9 ч 07 мин 55 с, расстояние до грузовика было 150 метров. Когда часы показали 9 ч 08 мин 05 с, то расстояние было уже 50 метров. Определите показания часов (с точностью до одной десятой секунды) в момент, когда грузовик проехал мимо пешехода.

Ответ: 9 ч 08 мин 10,0 с или 9 ч 08 мин 02,5 с.

Решение. Прошло 10 секунд, возможны два варианта. **(1 балл)**

Первый, грузовик не доехал до пешехода, то есть проехал 100 метров. **(2 балла)**

Его скорость $v = \frac{s}{t} = \frac{100}{10} = 10$ м/с. **(2 балла)**

Следовательно, 150 метров он преодолеет за $\tau = \frac{150}{v} = 15$ секунд. **(2 балла)**

Показания часов в этом случае: 9 ч 08 мин 10,0 с. **(1 балл)**

Второй вариант, грузовик уже успел проехать мимо пешехода, то есть проехал 200 метров. **(2 балла)**

Его скорость $v = \frac{s}{t} = \frac{200}{10} = 20$ м/с. **(2 балла)**

Следовательно, 150 метров он преодолеет за $\tau = \frac{150}{v} = 7{,}5$ секунд. **(2 балла)**

Показания часов в этом случае: 9 ч 08 мин 02,5 с. **(1 балл)**

Примечание: полный балл можно получить только при рассмотрении обоих возможных вариантов развития ситуации

8. (*15 баллов*) Два таракана, располагаясь на противоположных концах 80 сантиметровой прямой соломинки, одновременно начинают ползти навстречу друг другу. Скорость одного равна 1,5 см/с, а второго – 2,5 см/с. В момент встречи они разворачиваются и ползут обратно. Добравшись до концов соломинки, они опять разворачиваются и снова ползут навстречу друг другу. И так далее. Определите, в какой момент времени от начала движения тараканы встретятся во второй раз? На каком расстоянии от центра соломинки произойдёт их 2026 встреча?

Ответ: 60 с и 10 см.

Решение. Скорость сближения (удаления) тараканов:

$v = v_1 + v_2 = 1{,}5 + 2{,}5 = 4$ см/с. **(3 балла)**

Первая встреча состоялась через $t_1 = \frac{s}{v} = \frac{80}{4} = 20$ секунд. **(3 балла)**

Вторая встреча состоялась через:

$t_2 = t_1 + \frac{2s}{v} = 20 + \frac{2 \cdot 80}{4} = 60$ секунд после начала движения. **(3 балла)**

Все встречи происходят в одном месте. **(3 балла)**

На расстоянии $x = \frac{l}{2} - v_1 t_1 = \frac{80}{2} - 1{,}5 \cdot 20 = 10$ см от центра. **(3 балла)**