ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2025-2026 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, А.Д. Терёшин.

Задача 5.3 была предложена Д.Н. Оскорбиным, 6.2 – С.Е. Бойченко, 6.3 – А.А. Чироновым, 7.2 – А.В. Резниковым.

5 класс

5.1. На уроке физкультуры дети выстроились в ряд. Между Петей и Сашей стоит 5 ребят, а между Сашей и Мишей стоит 7 ребят. Сколько ребят может стоять между Петей и Мишей?

Ответ. 13 или 1.

Решение. Если Саша стоит между Петей и Мишей, то между Петей и Мишей 7+5+1=13 ребят. Если же Петя стоит между Сашей и Мишей, то между Петей и Мишей 7–5–1=1 школьник.

Комментарий. Получен только один из двух ответов – 3 балла.

5.2. На доске вначале написано число 123. С числом на доске разрешается выполнять одну из двух операций: стереть его последнюю цифру, удвоить число. Четырехзначные числа записывать на доску нельзя. Можно ли получить на доске число, большее 95?

Ответ. Можно.

Решение. Один из способов: $123 \to 246 \to 492 \to 984 \to 98$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Любой верный пример – 7 баллов.

5.3. Алексей хочет купить в магазине несколько одинаковых шоколадок. Цена каждой шоколадки выражается целым числом рублей. Если он даст кассиру купюру в 1000 рублей, он сможет купить 9 шоколадок. Если он добавит купюру в 100 рублей, то всё равно сможет купить только 9 шоколадок. Сколько стоит одна шоколадка?

Ответ. 111 рублей.

Решение. Из второго условия следует, что цена шоколадки больше 110 рублей (иначе 1100 рублей хватило бы на 10 шоколадок). А из первого условия – что цена меньше 112 рублей, так как $9 \cdot 112 > 1000$, то есть, 1000 рублей не хватило бы на покупку 9 шоколадок. Осталось проверить, что при цене 111 рублей условия выполняются.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 2 балла.
Доказано только, что цена шоколадки больше 110 рублей, или что цена шоколадки меньше 112 рублей – 3 балла.

5.4. Найдите наибольшее 2025-значное число, у которого каждая цифра, кроме первой и последней, равна сумме двух соседних с ней цифр, умноженной на некоторое натуральное число или ноль (этот множитель не обязательно должен быть один и тот же при получении цифр искомого числа).

Ответ. 990990…990.

Решение. Из двух чисел с одинаковым числом цифр больше то, у которого в первом слева разряде, в котором числа различаются, цифра больше. Значит, искомое число X должно начинаться с цифры 9. Вторую цифру тоже можно сделать равной 9. Для этого нужно, чтобы третья цифра числа X равнялась 0, а множитель равнялся 1. Тогда $X = 990АБВ\ldots$. Цифра 0 в третьем слева разряде может быть получена как произведение суммы $(9 + А)$ на 0. Повторяя приведенные рассуждения для цифр Б, В, … , получаем тройки цифр 990. Число X оканчивается на 990, поскольку 2025 делится на 3. И построение искомого числа получено.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 3 балла.
Объяснено, на какие числа умножаются суммы соседних цифр – ещё 2 балла.

5.5. Дана таблица 9×9. Назовем клетки таблицы *соседними*, если они имеют ровно одну общую вершину. Можно ли расставить в клетки этой таблицы различные натуральные числа от 1 до 81 так, что сумма чисел, стоящих в любых двух соседних клетках, не делилась бы на 3?

Ответ. Можно.

Решение. Заметим, что сумма двух чисел делится на 3, если либо оба числа делятся на 3, либо одно из них имеет остаток 1 при делении на 3, а другое – остаток 2 при делении на 3.
Среди чисел от 1 до 81 ровно 27 делятся на 3 (имеют остаток 0 при делении на 3), ровно 27 имеют остаток 1 при делении на 3 и ровно 27 имеют остаток 2 при делении на 3.
Тогда, например, можно в первые три строки поставить числа, имеющие остаток 1 при делении на 3, а потом в 4, 6 и 8 строки числа, делящиеся на 3, а в 5, 7 и 9 – числа, имеющие остаток 2 при делении на 3. Например, так (примеры могут другими):

1	4	7	10	13	16	19	22	25
28	31	34	37	40	43	46	49	52
55	58	61	64	67	70	73	76	79
3	6	9	12	15	18	21	24	27
2	5	8	11	14	17	20	23	26
30	33	36	39	42	45	48	51	54
29	32	35	38	41	44	47	50	53
57	60	63	66	69	72	75	78	81
56	59	62	65	68	71	74	77	80

Замечание. Существуют и другие примеры, существенно отличающиеся по конструкции.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Любой верный пример – 7 баллов.