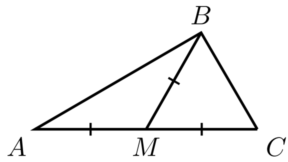
1. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Найдите градусную меру угла A, если $\angle C = 50^\circ$ и $BM = AM = MC$.



Решение:

1. Так как BM — медиана, точка M — середина AC, значит $AM = MC$.
2. По условию $BM = AM = MC$. Следовательно, точка M равноудалена от вершин A, B и C.
3. **Ключевой факт:** если середина стороны треугольника равноудалена от всех его вершин, то эта сторона является диаметром описанной окружности, а треугольник — прямоугольный, причём прямой угол лежит напротив этой стороны.
4. Значит, $\triangle ABC$ — прямоугольный с $\angle B = 90^\circ$.
5. В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90°:

$$\angle A + \angle C = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle A = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

Ответ:

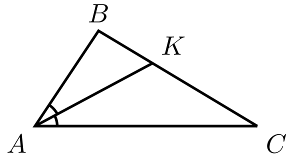
4	0		

Полезно помнить:

- Если медиана треугольника равна половине стороны, на которую она опущена, то треугольник прямоугольный.
- Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Маракулин А.Ю.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK. Найдите градусную меру угла B, если $\angle C = 11^\circ$ и $AK = CK$.



Решение:

1. Рассмотрим $\triangle AKC$. По условию $AK = CK$, значит, этот треугольник равнобедренный с основанием AC.
2. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны: $\angle CAK = \angle C = 11^\circ$.
3. AK — биссектриса $\angle A$ в $\triangle ABC$, поэтому $\angle BAK = \angle CAK = 11^\circ$.
4. Следовательно, весь угол A равен: $\angle A = \angle BAK + \angle CAK = 11^\circ + 11^\circ = 22^\circ$.
5. Сумма углов треугольника равна 180°:

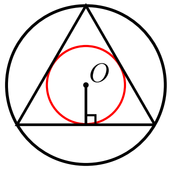
$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 22^\circ - 11^\circ = 147^\circ.$$

Ответ: | 1 | 4 | 7 | |

Полезно помнить:

- В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
- Биссектриса делит угол пополам.
- Сумма углов треугольника равна 180°.

3. В окружность с центром в точке O вписан равносторонний треугольник. Расстояние от точки O до сторон треугольника равно $\sqrt{3}$. Найдите сторону треугольника.



Решение:

1. Расстояние от центра окружности до стороны вписанного правильного треугольника — это радиус вписанной окружности r. По условию $r = \sqrt{3}$.

2. **Формула для равностороннего треугольника:** радиус вписанной окружности связан со стороной a соотношением:
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

3. Подставим известное значение $r = \sqrt{3}$:
$$\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad \Rightarrow \quad a = 6.$$

Ответ: 6

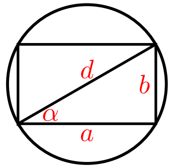
Полезно помнить:
Для правильного треугольника:

- $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ — радиус описанной окружности
- $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ — радиус вписанной
- $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота.

Заметьте: $R = 2r$, $h = R + r$.

Все эти формулы есть в справочных материалах!

4. Синус угла между стороной и диагональю прямоугольника равен 0,6. Диаметр описанной около него окружности равен 5. Найдите площадь прямоугольника.



Решение:

1. Диаметр окружности, описанной около прямоугольника, равен его диагонали. Значит, диагональ $d = 5$.

2. Пусть α — угол между стороной a и диагональю d. По условию $\sin\alpha = 0{,}6$.

3. В прямоугольном треугольнике синус угла α — это отношение противолежащего катета b к гипотенузе d:

$$\sin\alpha = \frac{b}{d} \quad \Rightarrow \quad b = d \cdot \sin\alpha = 5 \cdot 0{,}6 = 3.$$

4. По теореме Пифагора найдём вторую сторону:

$$a = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

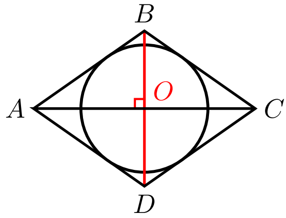
5. Площадь прямоугольника: $S = a \cdot b = 4 \cdot 3 = 12$.

Ответ: | 1 | 2 | | |

Полезно помнить:

- Синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.
- Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$.
- Часто встречаются «египетские» тройки: 3–4–5, 5–12–13.

5. Диагональ AC ромба $ABCD$ равна 8, а $\operatorname{tg}\angle BCA = 0{,}75$. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.



Решение:

1. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и делятся точкой пересечения O пополам. Значит, $AO = OC = \dfrac{AC}{2} = 4$.
2. Рассмотрим прямоугольный $\triangle BOC$ ($\angle O = 90°$). Угол $\angle BCA = \angle OCB$, поэтому:
$$\operatorname{tg}\angle OCB = \frac{OB}{OC} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad OB = OC \cdot 0{,}75 = 4 \cdot 0{,}75 = 3.$$
3. Вторая диагональ: $BD = 2 \cdot OB = 6$.
4. Сторона ромба по теореме Пифагора:
$$BC = \sqrt{CO^2 + OB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$
5. Площадь ромба: $S = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24$.
6. Радиус вписанной окружности: $r = \dfrac{S}{2a} = \dfrac{24}{2 \cdot 5} = 2{,}4$.

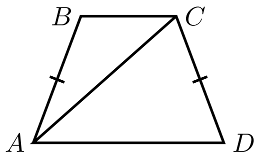
Ответ: | 2 | , | 4 | |

Полезно помнить:

- Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему.
- В ромб всегда можно вписать окружность. Радиус вычисляется по формуле $r = \dfrac{S}{2a}$ или $r = \dfrac{h}{2}$.
- Диагонали ромба перпендикулярны и делят углы пополам.
- Площадь ромба можно вычислить по формуле $S = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Эта формула есть в справочных материалах.

6. В равнобедренной трапеции с основаниями AD и BC угол D равен 61°. Диагональ AC образует со стороной CD угол 81°. Сколько градусов составляет угол между этой диагональю и меньшим основанием трапеции?



Решение:

1. Рассмотрим $\triangle ACD$. Сумма углов треугольника равна $180°$:

$$\angle CAD + \angle ACD + \angle D = 180°.$$

2. Подставим известные значения: $\angle CAD + 81° + 61° = 180°$, откуда $\angle CAD = 38°$.

3. Поскольку $AD \parallel BC$, углы $\angle CAD$ и $\angle ACB$ — накрест лежащие при секущей AC, значит, они равны.

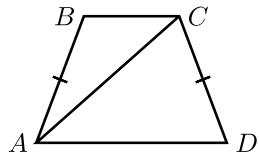
4. Следовательно, угол между диагональю AC и меньшим основанием BC равен $38°$.

Ответ: | 3 | 8 | | |

Полезно помнить:

- Сумма углов треугольника равна 180°.
- Если две прямые параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

7. В равнобедренной трапеции с основаниями AD и BC угол D равен 61°. Диагональ AC образует со стороной AB угол 23°. Сколько градусов составляет угол между этой диагональю и меньшим основанием трапеции?



Решение:

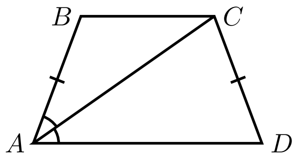
1. В равнобедренной трапеции $\angle A = \angle D = 61^\circ$.
2. Диагональ AC делит угол BAD на два угла: $\angle BAC = 23^\circ$ (по условию) и $\angle CAD$.
3. Найдём $\angle CAD$: $\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = 61^\circ - 23^\circ = 38^\circ$.
4. Поскольку $AD \parallel BC$, углы $\angle CAD$ и $\angle ACB$ — накрест лежащие при секущей AC, значит, $\angle ACB = \angle CAD = 38^\circ$.
5. Угол $\angle ACB$ — это и есть угол между диагональю AC и меньшим основанием BC.

Ответ: | 3 | 8 | | |

Полезно помнить:

- В равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны.
- Если две прямые параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

8. В равнобедренной трапеции $ABCD$ угол D равен $48°$. Найдите градусную меру угла ACD, если луч AC является биссектрисой угла BAD.



Решение:

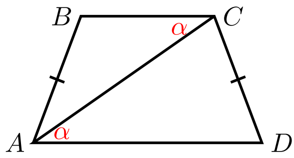
1. В равнобедренной трапеции $\angle A = \angle D = 48°$.
2. Луч AC — биссектриса $\angle A$, поэтому $\angle BAC = \angle CAD = \dfrac{48°}{2} = 24°$.
3. Рассмотрим $\triangle ACD$. Сумма углов треугольника:
$$\angle CAD + \angle ACD + \angle D = 180°.$$
4. Подставим известные значения: $24° + \angle ACD + 48° = 180°$.
5. Отсюда $\angle ACD = 180° - 72° = 108°$.

Ответ: | 1 | 0 | 8 | |

Полезно помнить:

- В равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны.
- Биссектриса делит угол пополам.
- Сумма углов треугольника равна $180°$.

9. Диагональ равнобедренной трапеции образует с боковыми сторонами углы 18° и 58°. Сколько градусов составляет угол при большем основании трапеции?



Решение:

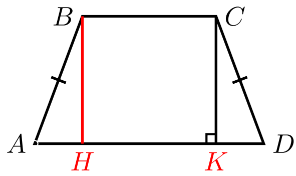
1. Пусть диагональ AC образует с боковой стороной AB угол 18°, а с боковой стороной CD — угол 58°.
2. Тогда $\angle BAC = 18^\circ$, $\angle ACD = 58^\circ$.
3. В трапеции $\angle C + \angle D = 180^\circ$ (сумма углов при боковой стороне), а в равнобедренной трапеции углы при основании равны: $\angle A = \angle D$, то $\angle C + \angle A = 180^\circ$
4. Поскольку $AD \parallel BC$, углы $\angle CAD$ и $\angle ACB$ — накрест лежащие при секущей AC, значит, $\angle CAD = \angle ACB$. Пусть они равны α.
5. Тогда $(\alpha + 58^\circ) + (\alpha + 18^\circ) = 180^\circ$. Отсюда $\alpha = 52^\circ$.
6. Тогда угол C при большем основании: $52^\circ + 18^\circ = 70^\circ$.

Ответ: | 7 | 0 | | |

Полезно помнить:

- В трапеции сумма углов при боковой стороне равна 180°.
- Если две прямые параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

10. Высота равнобедренной трапеции, проведённая из конца её меньшего основания, делит большее основание на отрезки длиной 2 и 5. Найдите меньшее основание трапеции.



Решение:

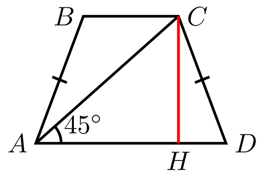
1. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция, BC — меньшее основание, AD — большее.
2. Проведём высоты BH и CK из вершин меньшего основания на большее.
3. В равнобедренной трапеции отрезки AH и KD равны. Это следует из равенства отсечённых высотами треугольников (по гипотенузе и острому углу).
4. По условию высота из C делит AD на отрезки 2 и 5. Значит, один из отрезков $KD = 2$, а другой $AK = 5$.
5. Тогда $HK = AK - AH = AK - KD = 5 - 2 = 3$.
6. Так как $HBCK$ — прямоугольник, то $BC = HK = 3$.

Ответ: 3

Полезно помнить:

- В равнобедренной трапеции высоты, опущенные из вершин меньшего основания, отсекают от большего основания два равных отрезка. Между ними лежит отрезок, равный меньшему основанию.

11. Диагональ равнобедренной трапеции образует с её основанием угол 45°. Найдите высоту трапеции, если её основания равны 2 и 5.



Решение:

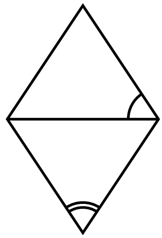
1. Пусть $AD = 5$ — большее основание, $BC = 2$ — меньшее.
2. Проведём высоту CH из вершины C на основание AD. Тогда $AH = \frac{AD + BC}{2} = \frac{5+2}{2} = 3{,}5$.
3. По условию диагональ образует с основанием угол 45°. Тогда в треугольнике ACH второй острый угол тоже равен 45°. Значит $\triangle ACH$ равнобедренный: $CH = AH = 3{,}5$.

Ответ: 3,5

Полезно помнить:

- Высота равнобедренной трапеции, проведённая из вершины меньшего основания, делит нижнее основание на два отрезка, один из которых равен полусумме оснований, а другой — полуразности.

12. Острый угол ромба равен 36°. Сколько градусов составляет угол между стороной и меньшей диагональю ромба?



Решение:

1. Сумма соседних углов любого параллелограмма (в том числе и ромба) равна 180°, тогда если острый угол равен 36°, то тупой равен $180° - 36° = 144°$.

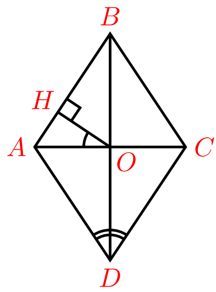
2. Меньшая диагональ соединяет вершины с тупыми углами и делит эти углы пополам, значит угол между стороной ромба и меньшей диагональю равен $144° : 2 = 72°$.

Ответ: | 7 | 2 | | |

Полезно помнить:

- Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.
- Сумма соседних углов любого параллелограмма равна 180°.

13. Перпендикуляр, проведённый из точки пересечения диагоналей ромба к его стороне, образует с одной из его диагоналей угол 28°. Сколько градусов составляет острый угол ромба?



Решение:

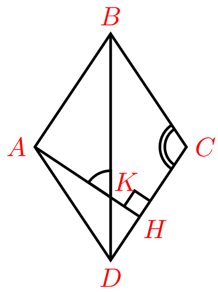
1. Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$, $OH \perp AB$.
2. По условию $\angle HOC = 28^\circ$ (угол между перпендикуляром и диагональю).
3. В прямоугольном $\triangle AOH$: $\angle AOH = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$.
4. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов, поэтому $\angle BAD = 2\angle OAB = 2\angle OAH = 124^\circ$.
5. Сумма соседних углов любого параллелограмма (в том числе и ромба) равна 180°, тогда если тупой угол равен 124°, то острый равен $180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$.

Ответ: | 5 | 6 | | |

Полезно помнить:

- Диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам.
- В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90°.
- Сумма соседних углов любого параллелограмма равна 180°.

14. Один из углов ромба равен 110°. Сколько градусов составляет угол между высотой и большей диагональю ромба?



Решение:

1. Пусть $\angle C = 110^\circ$ (тупой угол ромба). Тогда острый угол $\angle D = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.
2. Диагональ DB ромба является биссектрисой угла CDA.
3. Значит, диагональ DB делит $\angle D$ пополам: $\angle CDB = \dfrac{70^\circ}{2} = 35^\circ$.
4. Пусть высота AH пересекает диагональ BD в точке K. В прямоугольном $\triangle KDH$ сумма острых углов равна 90°.
5. Значит, угол $DKH = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.
6. Вертикальные углы равны: $\angle AKB = \angle DKH = 55^\circ$.

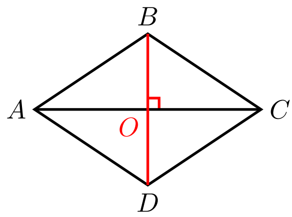
Ответ:

5	5		

Полезно помнить:

- Сумма соседних углов любого параллелограмма равна 180°.
- Диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам.
- Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.
- Вертикальные углы равны.

15. Диагональ AC ромба $ABCD$ равна 20, а $\operatorname{tg}\angle BCA = 0{,}1$. Найдите площадь ромба.



Решение:

1. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и делятся точкой пересечения O пополам.

2. Значит, $AO = OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{20}{2} = 10.$

3. Рассмотрим прямоугольный $\triangle BOC$ ($\angle O = 90^\circ$). По условию $\operatorname{tg}\angle BCA = \operatorname{tg}\angle BCO = 0{,}1.$

4. Тангенс острого угла прямоугольного треугольника — это отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg}\angle BCO = \frac{BO}{OC} = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad BO = OC \cdot 0{,}1 = 10 \cdot 0{,}1 = 1.$$

5. Вторая диагональ: $BD = 2 \cdot BO = 2 \cdot 1 = 2.$

6. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей:

$$S = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{20 \cdot 2}{2} = 20.$$

Ответ: | 2 | 0 | | |

Полезно помнить:

- Диагонали ромба перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам.
- Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему.
- Площадь ромба можно найти по формуле $S = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.